

## INDICE DEI CONTENUTI

- Sistemi di riferimento ortogonali
  - Coordinate cartesiane
  - Coordinate sferiche
  - Coordinate cilindriche
- Operatori differenziali
  - Divergenza di una funzione vettoriale
  - Teorema della divergenza (o di Gauss-Ostrogradsky)
  - Divergenza in coordinate cartesiane
  - Rotore di una funzione vettoriale
  - Teorema della circuitazione (o di Stokes)
  - Rotore in coordinate cartesiane
  - Gradiente
  - Laplaciano
  - Operatori differenziali in sintesi
- Campi elettrostatici di alcune distribuzioni continue di carica
  - Campo elettrostatico generato da un anello uniformemente carico, nei punti del suo asse -
  - Campo elettrostatico generato da un filo uniformemente carico, a forma di arco di - circonferenza, nel suo centro
  - Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico -
  - Campo elettrostatico generato da un disco uniformemente carico, nei punti del suo asse (I-II metodo)
  - Campo elettrostatico generato da un piano indefinito, uniformemente carico (I-II metodo) -
  - Campo elettrostatico generato da due piani carichi uniformemente, indefiniti e paralleli -
  - Equivalenza tra i campi elettrostatici prodotti da un filo rettilineo carico ed un filo a forma - di arco di circonferenza nel punto P, centro della circonferenza, con filo rettilineo tangente ad essa (arcolinea)
  - Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo di lunghezza L, uniformemente carico  $\rho$
- Teorema di Gauss
  - Premessa (1): flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme attraverso - due superfici che sottengono a un angolo solido
  - Premessa (2): flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie sferica, con il campo - generato da una carica posta al centro della sfera
  - Dimostrazione del teorema di Gauss -
  - Enunciato del teorema di Gauss -
  - Teorema di Gauss in forma differenziale (o locale) -
- Applicazioni del teorema di Gauss per il calcolo dell'espressione del campo elettrostatico generato da alcune distribuzioni continue di carica
  - Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico
  - Campo elettrostatico generato da un piano indefinito, uniformemente carico
  - Campo elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita su una superficie sferica
  - Campo elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita in una sfera
  - Campo elettrostatico generato da una carica Q distribuita in una sfera con densità volumica variabile, funzione del punto

- Distribuzione della carica su un conduttore isolato -
- Campo elettrostatico nelle immediate vicinanze di un conduttore isolato, carico: teorema di Coulomb -
- Conservatività del campo elettrostatico -
- Linee di forza del campo elettrostatico -
- Schermo elettrostatico
- Potenziale elettrostatico -
  - Premessa matematica: descrizione di campi scalari e vettoriali -
  - Derivata direzionale -
  - Ripasso su operatori differenziali -
  - Forze conservative ed energia potenziale -
  - Campi conservativi e funzioni potenziali -
  - Definizione di potenziale elettrostatico -
  - Potenziale elettrostatico generato da una distribuzione continua di carica generica (lineare, superficiale, volumica) -
- Calcolo di potenziali
  - Regola generale per il calcolo di potenziali -
  - Potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme -
  - Potenziale elettrostatico generato da una carica uniformemente distribuita su una superficie sferica
  - Potenziale elettrostatico generato da una carica uniformemente distribuita in una sfera -
  - Potenziale elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico -
- La superficie di un conduttore è equipotenziale -
- Energia elettrostatica
  - Energia elettrostatica di due cariche puntiformi
  - Energia elettrostatica di  $N$  cariche puntiformi
  - Espressione dell'energia elettrostatica in funzione del potenziale elettrostatico
- Dipolo elettrico
  - Definizione di dipolo elettrico e di momenti di dipolo elettrico
  - Campo elettrostatico in prossimità di un dipolo elettrico
  - Calcolo del campo elettrostatico di un dipolo elementare nei punti della retta delle due cariche, esternamente ad esse
  - Comportamento di un dipolo elettrico quando questo è immerso in un campo elettrico: momento della forza relativo ad un dipolo
- Condensatori
  - Definizione di condensatore e di capacità
  - Energia elettrostatica di un condensatore
- Analisi di alcune tipologie di condensatori comunemente diffusi
  - Condensatore piano: differenza di potenziale, capacità, energia elettrostatica
  - Condensatore sferico: differenza di potenziale, capacità, energia elettrostatica
  - Condensatore cilindrico: differenza di potenziale, capacità, energia elettrostatica
- Correnti
  - Definizione di corrente elettrica -
  - Calcolo della velocità di una corrente  $j$
  - Densità di corrente -

- Equazione di continuità -
- Leggi di Ohm (I-II) -
- Effetto Joule -
- ❖ **Campo di induzione magnetica**
  - Introduzione al campo magnetico e forza di Lorentz
  - Azione del campo di induzione magnetica su una carica  $q$  in esso iniettata
- ❖ **I formula di Laplace ed applicazioni**
  - Campo di induzione magnetica prodotto da un filo a forma di arco di circonferenza, percorso da corrente, nel suo centro
  - Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, percorsa da corrente, nel suo centro
  - Campo di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo finito, percorso da corrente
  - Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, percorsa da corrente, nei punti del suo asse
  - Campo di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo indefinito, percorso da corrente: legge di Biot-Savart
- ❖ **Notazioni su campi centrali e azimutali**
- ❖ **II formula di Laplace ed applicazioni**
  - Momento di dipolo di associato ad una spira percorsa da corrente
  - Momento torcente di una spira percorsa da corrente, immersa in un campo magnetico
  - Forza agente su un tratto di filo, percorso da corrente, ed immerso in un campo magnetico uniforme
  - Forza agente su un filo chiuso, percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico uniforme
  - Interazione tra due fili paralleli e indefiniti, percorsi da corrente
- ❖ **Teorema di Ampere**
  - Premessa matematica: circuitazione di un campo scalare lungo una linea -
  - Teorema di Ampere in forma integrale -
  - Teorema di Ampere in forma differenziale -
- ❖ **Il solenoide**
  - Calcolo del campo magnetico all'interno di un solenoide percorso da corrente
- ❖ **Induzione elettromagnetica**
  - Legge dell'induzione elettromagnetica
  - Fenomeni di induzione elettromagnetica di I specie
  - Fenomeni di induzione elettromagnetica di II specie
  - Fenomeni di autoinduzione
  - Fenomeni di mutua induzione
- ❖ **Equazioni di Maxwell statiche con spiegazioni**
- ❖ **Equazioni del campo elettromagnetico**
  - Teorema della derivata temporale del flusso di un campo vettoriale
  - Campo elettromotore non irrotazionale (non conservativo)
  - Teorema di Ampere-Maxwell in forma differenziale
  - Teorema di Ampere-Maxwell in forma integrale: corrente di spostamento
  - Principali proprietà delle onde elettromagnetiche e vettore di poynting

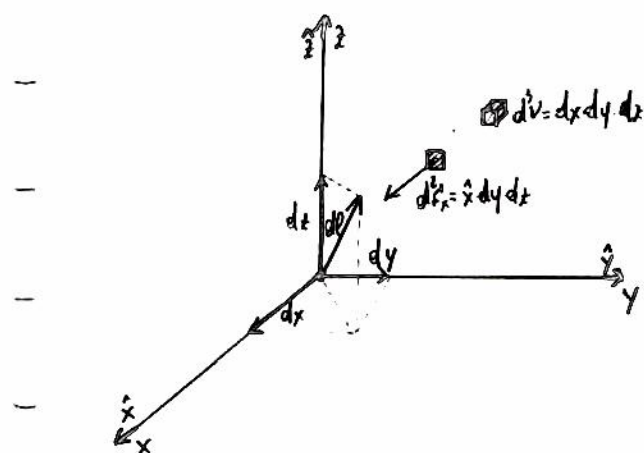
Un sistema di riferimento ortogonale ha coordinate sono perpendicolari l'una all'altra. Sono stati ideati molti sistemi di riferimento ortogonali, ma quelli più usati sono:

- il sistema in coordinate cartesiane (anche dette rettangolari)
- il sistema in coordinate sferiche
- il sistema in coordinate cilindriche

La motivazione di avere il bisogno di più di un sistema di riferimento è puramente analitica: la soluzione di determinati problemi può essere molto facilitata scegliendo convenientemente il sistema di riferimento più adatto alle peculiarità del problema.

### COORDINATE CARTESIANE

Il sistema in coordinate cartesiane è costituito da 3 assi ortogonali, orientati lungo le 3 direzioni  $x, y, z$ . Ciascun asse è caratterizzato da un vettore di modulo unitario  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ .



La lunghezza differenziale in coordinate cartesiane è il vettore definito come:  $dl = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$

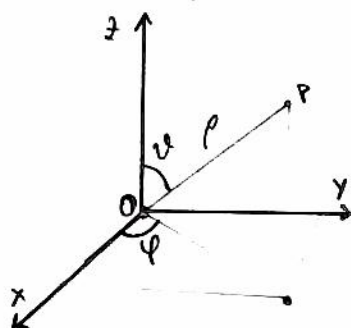
L'area differenziale  $d^2s$  è una grandezza vettoriale di modulo d'uguale al prodotto di due lunghezze differenziali, come  $dl_y = dy$  e  $dl_z = dz$ , e la sua direzione è indicata da un vettore diretto lungo la terza direzione, in questo caso  $\hat{z}$ .

Però, per un'area differenziale nel piano  $y-z$  si ha:  $d^2s_x = \hat{x} dy dz$ . Analogamente:  $d^2s_y = \hat{y} dx dz$  (piano  $x-z$ ) e  $d^2s_z = \hat{z} dx dy$  (piano  $x-y$ ).

Il volume differenziale è uguale al prodotto di tutte e 3 le lunghezze differenziali:  $dV = dx dy dz$

### COORDINATE SFERICHE

Le coordinate sferiche sono un sistema di coordinate nello spazio determinato da 3 parametri,  $\rho, \varphi, \vartheta$ . Detto  $\rho$  la lunghezza del raggio vettore, e detto  $\vartheta$  l'angolo formato dallo stesso raggio con l'asse  $z$ , il parametro  $\varphi$  indica la distanza fra  $P$  e  $Q$ , dove  $Q$  è l'angolo fra  $\vec{PO}$  e l'asse  $x$ , mentre  $\varphi$  è l'angolo fra l'asse  $x$  e la proiezione di  $\vec{PO}$  nel piano  $xy$ .



Possono delle coordinate sferiche quali coordinate cartesiane:

$$(\rho, \varphi, \vartheta) \rightarrow (x, y, z)$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta \end{cases}$$

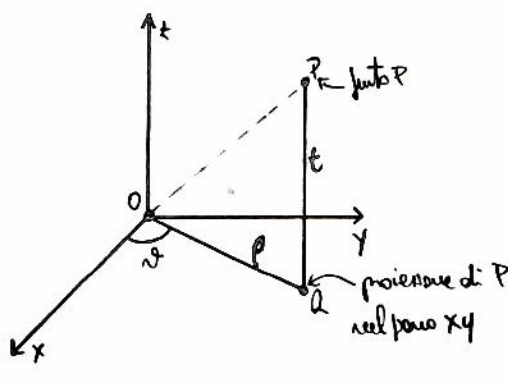
$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \vartheta, \varphi)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$



# COORDINATE CILINDRICHE

Le coordinate cilindriche sono un sistema di coordinate nello spazio determinate da tre parametri:  $\rho, \varphi, z$ . Nella  $O$  l'origine del sistema, e detto  $P$  un qualsiasi punto dello spazio, e detto  $Q$  la sua proiezione nel piano  $xy$ , il parametro  $\rho$  indica la lunghezza di  $OQ$  mentre  $\varphi$  indica l'angolo fra l'asse  $x$  e  $OQ$ :



Passaggio dalle coordinate cilindriche a quelle cartesiane e viceversa:

$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (x, y, z):$$

$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z):$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

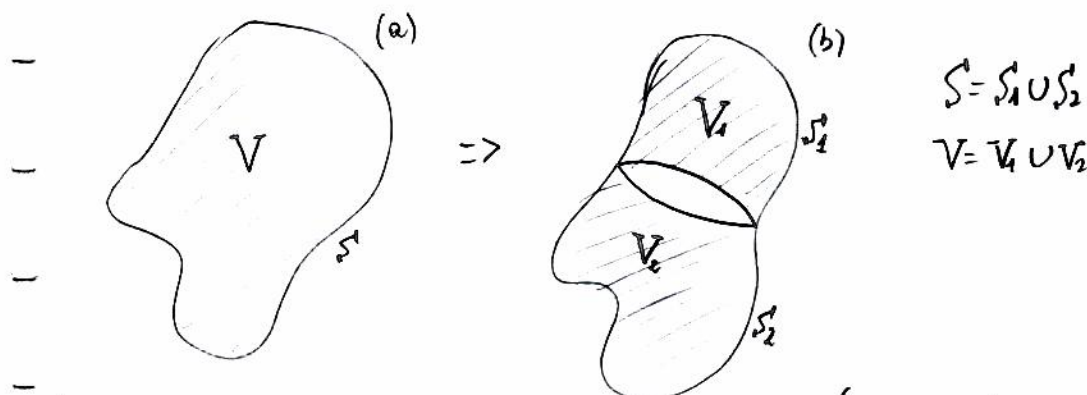
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

### • divergenza di una funzione vettoriale

Consideriamo un volume finito  $V$  di forma qualsiasi delimitato da una superficie  $S$ . Il flusso della funzione  $\vec{F}$  attraverso la superficie  $S$  vale:

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Dividiamo ora il volume  $V$  in due parti in modo da ottenere due volumi  $V_1$  e  $V_2$  delimitati da due superfici  $S_1$  e  $S_2$ :



Per le superficie (b), il flusso di  $\vec{F}$  attraverso  $S$  vale:  $\Phi = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2$

Generalizzando, se suddividiamo il volume in parti sempre più

piccole, otteniamo infiniti di superficie sempre più piccole:  $\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$

L'obiettivo è quello di ottenere qualcosa che sia caratteristico di una regione molto piccola, ovvero una caratteristica locale o puntuale dello spazio. Avremo pertanto utile definire le seguenti quantità:

$\int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$  /  $V_i$  Tale rapporto tende, procedendo per divisioni successive del volume (e quindi delle superficie), ad un limite che costituisce una proprietà della funzione  $\vec{F}$  in quell'intorno e che prende il nome di divergenza di  $\vec{F}$ :  

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$$

Tale limite esiste ed è indipendente da come avviene la suddivisione dello spazio. Nelle pratiche  $\text{div } \vec{F}$  è il flusso uscente da  $V_i$  per unità di volume nel caso limite in cui  $V_i$  è infinitesimo. La  $\text{div } \vec{F}$  è una grandezza scalare ed è funzione delle coordinate  $x, y, z$ .

### • Teorema della divergenza (o di Gauss-Ostrogradsky)

Consideriamo un dominio  $X$  e un volume  $V$  delimitato da una superficie  $S$ . Come fatto precedentemente per definire la divergenza, dividiamo il volume  $V$  in tanti piccoli volumetti  $\Delta V_i$  delimitati dalle superficie  $\Delta S_i$ . In queste operazioni di divisione siamo liberi di scegliere in maniera arbitraria le loro forme, purché il loro insieme costituisca una ripartizione del volume di partenza. Inconvenientemente nottoppiamo il numero di punti volumetti ed un processo limite si può ottenere ad  $\infty$  (il che farà tendere a 0 i valori dei volumetti). Avremo quindi infiniti volumetti infinitesimi. Nelle definizioni di divergenza vale:  $\Rightarrow$



$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i}{\Delta V_i} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} \Delta V_i = \oint_{\Delta S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i \quad \left| \begin{array}{l} \Delta V_i = dV_i \\ \Delta S_i = dS_i \end{array} \right. \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV_i = \oint_{dS_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$$

4

integrando su tutti i volumetti  $\Delta V_i$  otteniamo:  $\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$

I° MEMBRO: integrale sul volume delle  $\operatorname{div} \vec{F}$

II° MEMBRO: integrale sulla superficie (flussodel camp vettoriale  $\vec{F}$ ) attraverso la superficie  $S$  che delimita  $V$

Conclusione: Il th. della divergenza (o di Gauss-Ostrogradski) afferma che l'integrale delle divergenze di  $\vec{F}$  nel volume  $V$  è uguale al flusso di  $\vec{F}$  attraverso la superficie  $S$  che delimita il volume  $V$ .

• Divergenza in coordinate cartesiane:  $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$  ( $\vec{A} \rightarrow$  camp vettoriale)

Introducendo l'operatore nabla, definito come il vettore le cui componenti sono le derivate parziali rispetto ad  $x, y, z$ :

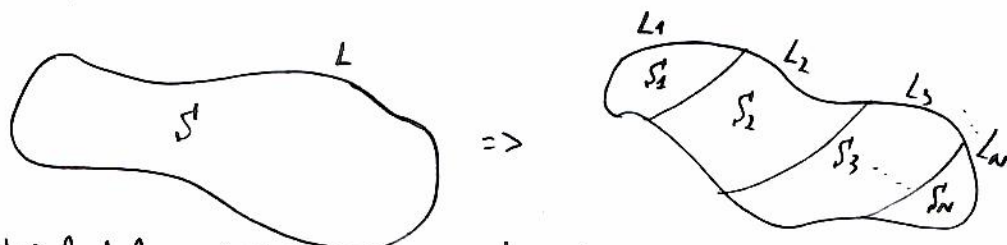
$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

possiamo scrivere l'espressione della divergenza di  $\vec{A}$  in forme cartesiane come il prodotto scalare fra il nabla e il camp vettoriale  $\vec{A}$ :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

• Rotore di una funzione vettoriale

Consideriamo una superficie  $S$  delimitata da un perimetro chiuso  $L$ , ed una funzione vettoriale  $\vec{F}(x, y, z)$ :



Consideriamo l'integrale di linea di  $\vec{F}$  lungo il perimetro chiuso  $L$ :

$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ , che prende il nome di circolazione. Anche in questo caso, suddividendo  $L$  in  $L_i$  sempre più piccoli, posso vedere la circolazione  $\Gamma$  come:

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_i \Rightarrow \Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i$$

Per definire il rotore consideriamo il rapporto tra la circolazione e l'area ed esse coinvolte  $S$ , orientate dal verso  $\vec{u}_n$ , e consideriamo normali ed uscenti dalle superficie. Facendo tendere a 0 la superficie che circonda un certo punto  $P$ , possiamo il seguente limite:

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{S}$$

Il limite che otteniamo è uno scalare associato al punto  $P$  nel camp vettoriale  $\vec{F}$  e alla direzione  $\vec{u}_n$ . Lo possiamo considerare come il risultato di un vettore:

$$(\operatorname{rot}) \vec{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{S}$$

nella pratica il rot  $\vec{F}$  è la circulatoria del camp. vettoriale  $\vec{F}$  lungo una linea chiusa molto piccola nel campo (in cui  $S'$  (la  $\vec{r}$  riferisce che si applica alle linee) ne infinitesima. Il rotore è una funzione vettoriale, cioè l'ess. funzione delle coordinate  $x, y, z$ .

• Teorema della circulatoria (o di Stokes):

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot \left( \frac{\vec{F}_i}{S_i} \right) \quad \text{per } N \rightarrow \infty \quad \begin{matrix} S_i \rightarrow 0 \\ \text{il termine fra parentesi tende a } \text{rot } \vec{F} \cdot \hat{u}_i \end{matrix}$$

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot \left( \frac{\vec{F}_i}{S_i} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{S}_i \cdot (\text{rot } \vec{F}) \hat{u}_i \rightarrow \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

• Rotore in coordinate cartesiane:

$$(\text{rot } \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (\text{rot } \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

• Gradiente

Se  $\varphi$  è un camp. scalare. Il gradiente del camp. scalare  $\varphi$ , indicato con  $\text{grad}(\varphi)$ , è il camp. vettoriale che in compo-  
\_nenti non cartesiane possiede di  $\varphi$  rispetto a  $x, y, z$ :  $\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi$

Il gradiente è fornito un vettore diretto secondo la massima variazione di  $\varphi$  e perpendicolare alle superfici in cui  $\varphi$  è costante.

• Gradiente in coord. cartesiane:

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k}$$

• Divergenza:

Se  $\varphi$  è un camp. scalare o vettoriale. Il grad. divergenza del camp.  $\varphi$  è la divergenza del gradiente di  $\varphi$ :

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi$$

• Divergenza in forme cartesiane:

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$



$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{V \rightarrow \phi} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{V} \quad (\text{divergenza})$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{th. di Gauss-Ostrogradskij})$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{divergenza in coord. cartesiane})$$

$$\text{rot } \vec{F} = \lim_{S \rightarrow \phi} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{S} \quad (\text{rotore})$$

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\text{th. delle curve chiuse o di Stokes})$$

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (\text{rotore in coord. cartesiane})$$

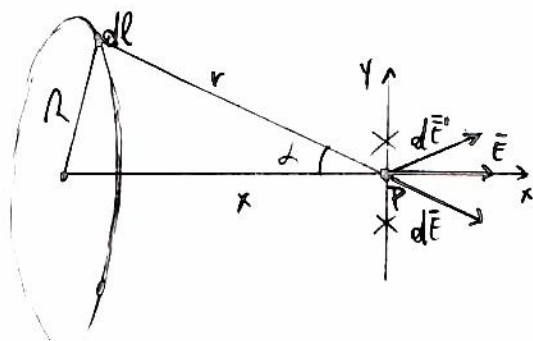
$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \quad (\text{gradiente di un campo scalare in coord. cartesiane})$$

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (\text{laplaciano in coord. cartesiane})$$

# CAMPI ELETTROSTATICI DI ALCUNE DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA

7

① Campo elettrostatico generato da un anello uniformemente carico nei punti del suo asse:



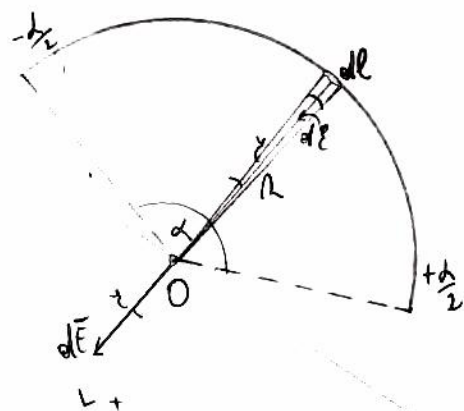
$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad r = \sqrt{x^2 + R^2} \quad dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{x^2 + R^2} \cdot \hat{r}$$

$$dE_x = |dE| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{x^2 + R^2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dl \quad |E_{tot}| = \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R =$$

$$= \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{Rx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (\text{lunghezza})$$

② Campo elettrostatico generato da un filo uniformemente carico, e finito di arco di circonferenza, nel suo centro.



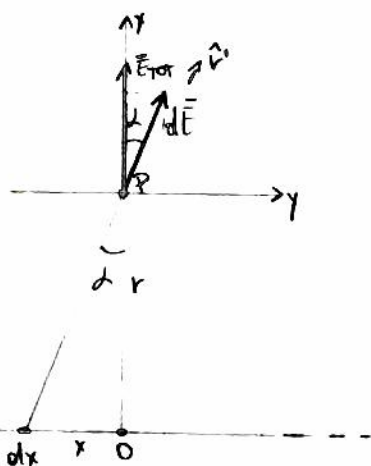
$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad dl = R \cdot d\theta \quad dq = \lambda R \cdot d\theta$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cdot \hat{r} \quad dE_x = |dE| \cdot \cos(\theta) \cdot \hat{x}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda d\theta}{R} \cdot \cos(\theta) \cdot \hat{x} \quad |E_{tot}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \cos(\theta) \cdot d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot 2 \sin(\alpha/2) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \sin(\alpha/2)$$

③ Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico:



$$\lambda = \frac{dq}{dx} \quad dq = \lambda dx \quad dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{x^2 + r^2} \cdot \hat{r}$$

$$|dE_x| = dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{x^2 + r^2} \cdot \cos(\alpha) \quad \cos(\alpha) = \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dx$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx \Rightarrow 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx$$

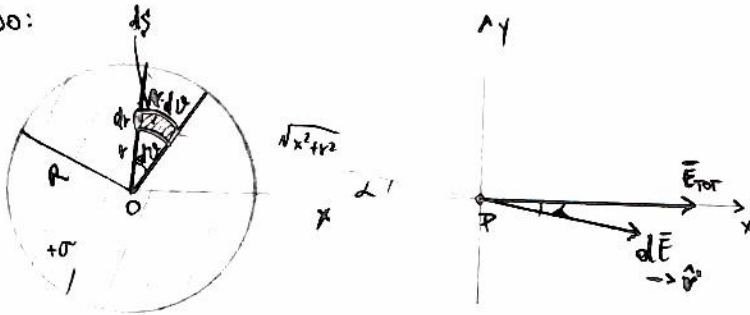
$$\Rightarrow E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx \Rightarrow I \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r \cdot \tan(\alpha) \\ dx = r \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha)} d\alpha = \frac{r}{\cos^2(\alpha)} d\alpha \\ x \rightarrow 0 \quad \alpha \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty \quad \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(r^2 \tan^2(\alpha) + r^2)^{3/2}} \cdot \frac{r}{\cos^2(\alpha)} d\alpha$$

$$I = \frac{1}{r^2} \cdot \left[ \sin(\alpha) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{r^2} \quad E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

4) Campo elettrostatico prodotto da un disco uniformemente carico, nei punti del suo asse:

I° METODO:



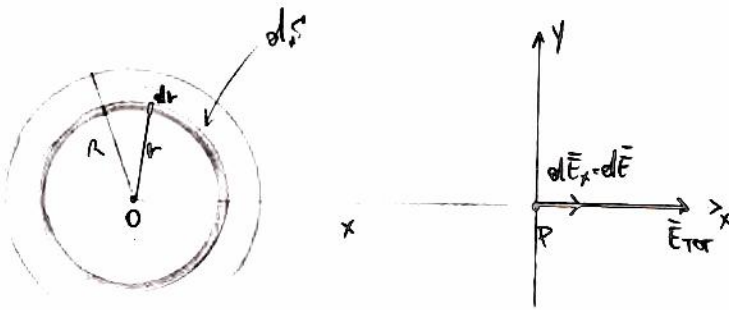
$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad dq = \sigma \cdot dS \quad dS = r \cdot d\varphi \cdot dr \quad dq = \sigma \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr}{x^2 + r^2} \cdot \hat{r}$$

$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$   
 $d\vec{E}_y$  (si elide per simmetria)

$$|d\vec{E}_x| = dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr}{x^2 + r^2} \cdot \cos(\alpha) \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$|\vec{E}_{tot}| = E_{tot} = \int dE_x = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

II° METODO:

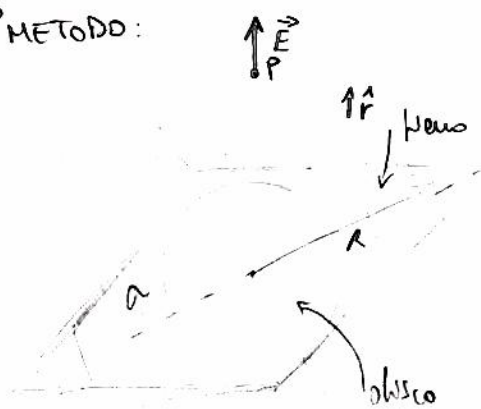


$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad dq = \sigma \cdot dS \quad dS = 2\pi r \cdot dr \quad dS \Rightarrow \text{elemento differenziale} \quad \lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{2\pi r} = \sigma \cdot dr \quad d\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr$$

$$\vec{E}_{tot} = \int d\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

5) Campo elettrostatico prodotto da un pannello indefinito, uniformemente carico:

I° METODO:

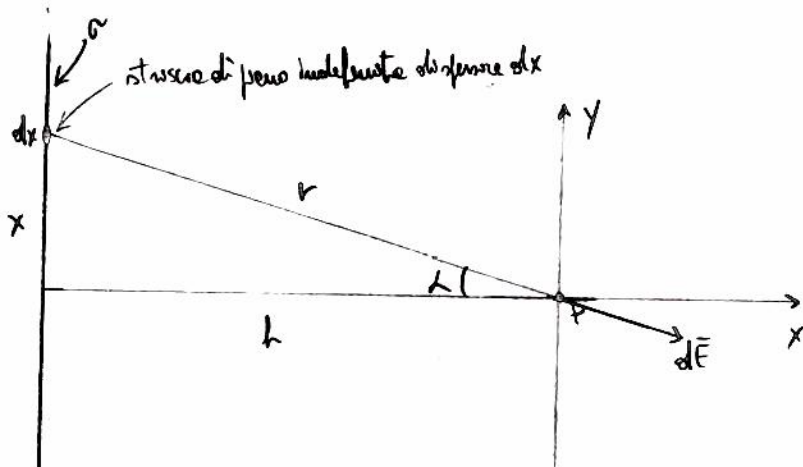


Pannello  $\rightarrow$  disco di raggio R che tende ad infinito

$$E = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

con direzione perpendicolare al pannello





La striscia di panno può essere considerata ed un filo rettilineo indefinito con:  $d\lambda = \sigma dx$ .

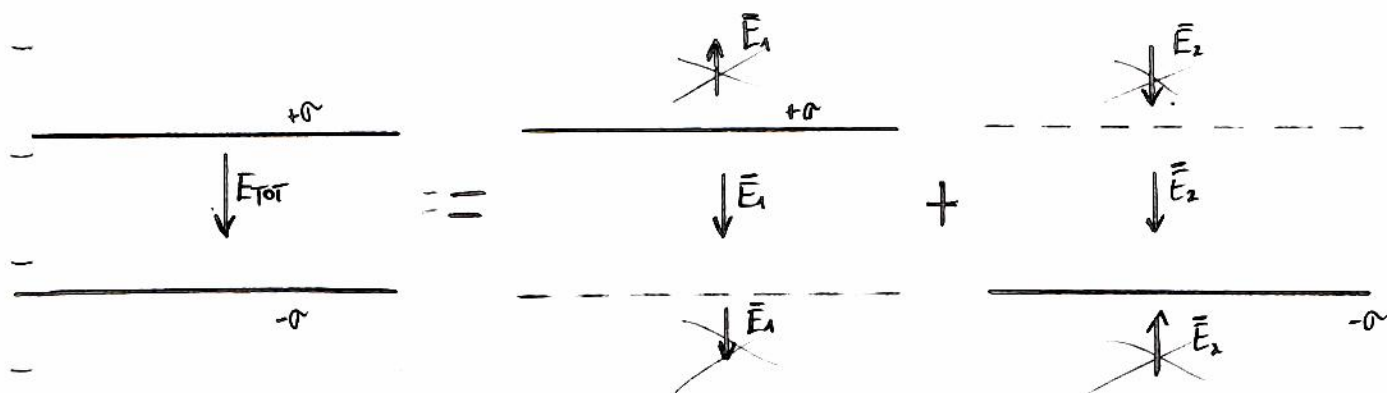
$$\vec{E} = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \hat{r} \quad \begin{cases} d\vec{E}_x = |\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x} \\ d\vec{E}_y \text{ (si elide per simmetria)} \end{cases} \quad |\vec{E}_x| = dE_x = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\begin{cases} x = h \cdot \tan(\alpha) \\ dx = h \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ h = r \cos(\alpha) \Rightarrow r = \frac{h}{\cos(\alpha)} \end{cases}$$

$$d\lambda = \sigma dx = \sigma \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad dE_x = \frac{\sigma \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha}{2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{h}{\cos(\alpha)}} \cdot \cos(\alpha) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} d\alpha$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dE_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\alpha = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \pi = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Il campo elettrostatico prodotto da due piani carichi uniformemente, indefiniti e paralleli:



$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad |\vec{E}_{\text{tot}}| = 2 \cdot |\vec{E}_1| = 2 \cdot |\vec{E}_2| = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \left( \begin{array}{l} \text{all'esterno dei piani: due campi non si annullano} \\ \text{ed opposti, si elidono} \end{array} \right)$$

Il campo è presente solo tra i due piani ed ha modulo pari a  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , direzione perpendicolare ai piani, e verso da quello carico positivamente (+sigma) a quello carico negativamente (-sigma)



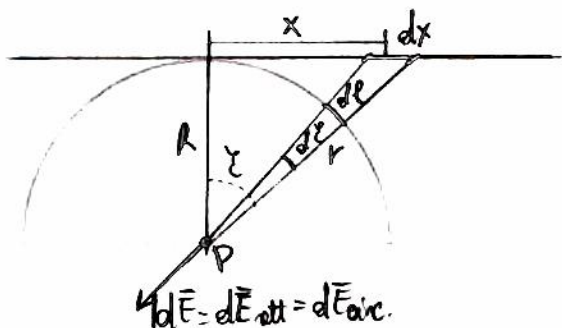
- ⑦ Provare che tra i campi elettrostatici prodotti da un filo rettilineo carico ed un filo e primo di raggio di circonferenza, nel punto P, centro della circonferenza, con filo rettilineo tangente ad esso.

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} = \frac{dQ}{dx} \quad dQ = \lambda dl = \lambda dx$$

I campi differenziali generati dalle cariche negli elementi differenziali  $dx$  e  $dl$  devono essere uguali, in modulo, direzione e verso. Direzione e verso sono gli stessi (risultato facile) Abbiamo poi da dimostrare che:

$$|d\vec{E}|_{\text{rett}} = |d\vec{E}|_{\text{arc}} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda dx}{r^2} = \frac{\lambda dl}{R^2}$$

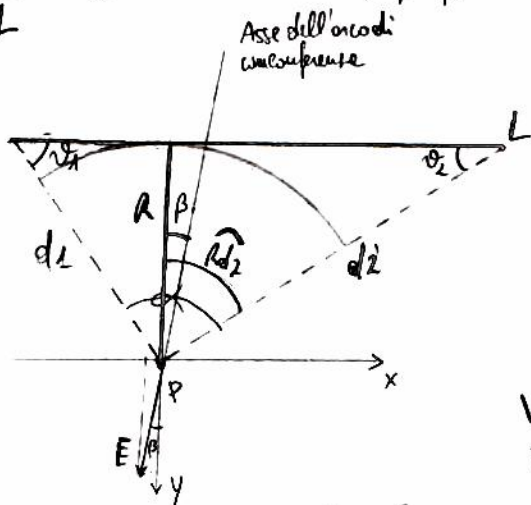


$$x = R \cdot \sin \theta \Rightarrow dx = R \cdot \cos \theta \cdot d\theta \Rightarrow R \cos \theta \cdot d\theta = dx \Rightarrow dl = R \cdot d\theta \Rightarrow dl = dx \cdot \cos \theta \quad (\text{moltiplico e divido per } \frac{\lambda}{R^2})$$

$$\frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{R^2} \cdot \cos \theta \cdot dx \Rightarrow \frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{(R^2 \cos \theta)} \cdot dx \rightarrow R = r \cos \theta \Rightarrow r = \frac{R}{\cos \theta} \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{r^2} \cdot dx} \quad \text{c.v.d.}$$

- ⑧ Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo di lunghezza L, uniformemente carico.

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} = \frac{Q}{L} \quad R \rightarrow \text{distanza di P dal filo, raggio dell'arco con centro in P.}$$



Per quanto detto precedentemente c'è un'equivalenza tra il campo generato in P dal filo e quello generato in P dall'arco di circonferenza, e vale:

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \alpha \rightarrow \text{angolo al centro}$$

Voglio calcolare le componenti lungo x e lungo y del campo elettrostatico esprimendole in termini di R,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$

Determino il valore dell'ampiezza dell'angolo  $\beta$ :

$$(\text{considerando il triangolo } d_1 d_2 L) \quad \alpha = \pi - (\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{considerando il triangolo } R d_2 L) \quad R d_2 = \pi - \frac{\alpha}{2} - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$$

$$\beta = R d_2 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta_2 - \left[ \frac{\pi - (\theta_1 + \theta_2)}{2} \right] = \frac{\pi}{2} - \theta_2 - \left[ \frac{\pi - \theta_1 - \theta_2}{2} \right] = \frac{\pi - 2\theta_2 - \pi + \theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad (\text{risultato noto})$$

$$\text{posso scrivere: } \frac{L}{2} = \frac{\pi - (\theta_1 + \theta_2)}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad \text{per cui: } |\vec{E}| = E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

Posso ora determinare le componenti del campo elettrostatico lungo gli assi x e y fissati, come:

$$|\vec{E}_x| = E_x = E \cdot \sin(\beta) \quad |\vec{E}_y| = E_y = E \cdot \cos(\beta) \quad \text{N.B. le componenti lungo l'asse x è negativa in quanto è diretta nel verso opposto a quello di orientazione dell'asse x}$$

• Determinazione delle componenti  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$  del camp:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} [\sin(\vartheta_1) - \sin(\vartheta_2)]$$

Formule di prosthese:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = \sin(p) - \sin(q), \text{ per cui:}$$

$$\cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right) = \frac{1}{2} (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2)$$

• Determinazione delle componenti  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$  del camp:

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$$

Formule di prosthese:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos(p) + \cos(q), \text{ per cui:}$$

$$\cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right) = \frac{1}{2} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$$

N.B.: Le componenti  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$  possono essere scritte come:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} [\sin(\vartheta_1) - \sin(\vartheta_2)]$$

per il triangolo  $\Delta$  dei v.  $R = d_1 \cdot \sin(\vartheta_1)$  e  $R = d_2 \cdot \sin(\vartheta_2)$   
 per cui:  $\sin(\vartheta_1) = \frac{R}{d_1}$  e  $\sin(\vartheta_2) = \frac{R}{d_2}$

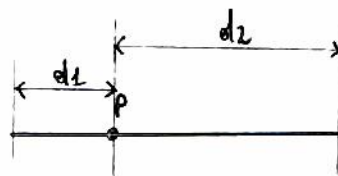
per cui:

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \left[ \frac{R}{d_1} - \frac{R}{d_2} \right] = \boxed{-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)}$$

$$\text{Riassumendo: } \vec{E} = \begin{cases} |\vec{E}_x| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ |\vec{E}_y| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) \end{cases}$$

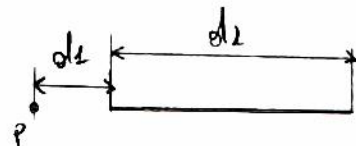
• Caso limite

$$\text{- P. si trova sul filo} \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \phi \\ \vartheta_1, \vartheta_2 = \phi \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ E_y = \infty \end{cases}$$



- P. si trova sulla retta del filo, ma esternamente ad esso

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ E_y = \phi \end{cases}$$





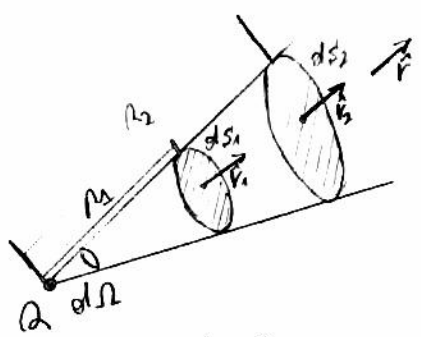
# TEOREMA DI GAUSS

12

Primo caso: Flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme attraverso due superfici che sottendono un angolo solido.

- $d\Omega \rightarrow$  angolo solido
- $dS_1, dS_2 \rightarrow$  superfici
- $\hat{r}_1, \hat{r}_2$  vettori di orientamento delle superfici
- $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \rightarrow$  vettori del campo elettrico che attraversano le superfici

1° caso: le superfici elementari  $dS_1$  e  $dS_2$  sono perpendicolari alla raddiante  $\vec{r}$ , e distanze diverse da  $Q$ .



$\vec{r} \rightarrow$  direzione raddiante

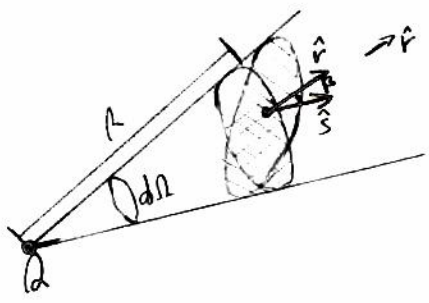
$$\hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \hat{r} \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cdot \hat{r} \quad d\vec{S}_1 = dS_1 \cdot \hat{r} \quad d\vec{S}_2 = dS_2 \cdot \hat{r}$$

$$d\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cdot \hat{r} \cdot d\vec{S}_1 \quad |d\vec{S}_1| = d\Omega \cdot r_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cdot d\Omega \cdot r_1^2 \Rightarrow d\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot d\Omega$$

$d\phi_1$  è indipendente dalla distanza, perciò:  $d\phi_1 = d\phi_2, \forall r_1, r_2$

2° caso: le superfici elementari  $dS_1$  e  $dS_2$  si trovano alla stessa distanza  $R$  dalla carica  $Q$ , ma sono orientate come  $\hat{r}$  ed  $\hat{s}$ :



$$d\vec{S}_1 = dS_1 \cdot \hat{r} \quad d\vec{S}_2 = dS_2 \cdot \hat{s}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot \hat{r} \quad d\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot dS_1$$

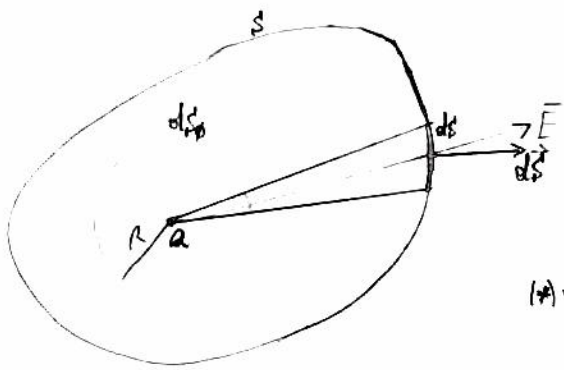
$$d\phi_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot dS_2 \cos(\theta)$$

$$dS_1 = dS_2 \cos(\theta) \quad d\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot dS_1 \Rightarrow d\phi_1 = d\phi_2$$

Il flusso, fissato l'angolo solido  $d\Omega$ , non dipende né dalla distanza né dall'orientamento delle superfici elementari.

• Teorema del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme  $Q$  attraverso una qualunque superficie chiusa  $S$ , orientata verso l'esterno:

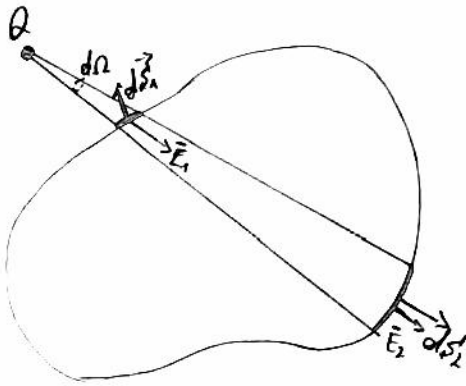
1° caso: CARICA INTERNA ALLA SUPERFICIE  $S$



$$\phi_e(dS_0) = \phi_e(dS)$$

$$\phi_e(dS_0) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \phi_e(dS_0) = \phi_e(S) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

(\*) vedi appendice dietro



$$\varphi_E(S_1) = -\varphi_E(S_2) \Rightarrow \varphi_E(S) = 0$$

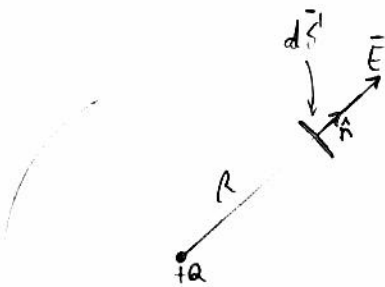
I risultati a cui siamo pervenuti possono essere generalizzati per ogni superficie chiusa attraversata dal th. di Gauss:

Il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa, orientata verso l'esterno, è uguale alla somma algebrica delle cariche interne alla superficie, diviso la costante dielettrica del vuoto:

$$\varphi_E(S) \Big|_{\text{chiusa}} = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0}$$

$Q_{\text{INT}}$  è la carica interna netta: se non presenti cariche la cui somma è nulla allora la carica interna netta è nulla.

APPENDICE - FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA  $+Q$  ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA RAGGIO  $R$ , ORIENTATA VERSO L'ESTERNO, CENTRATA SULLA CARICA



$$\varphi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \oint_S d\vec{S} = \vec{E} \cdot 4\pi R^2$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$$

$$\varphi_E(S) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \boxed{\frac{Q}{\epsilon_0}}$$



È possibile calcolare il campo elettrostatico generato da una distribuzione di cariche continue applicando i metodi di flusso del campo elettrostatico e il teorema di Gauss. I passi da seguire sono i seguenti:

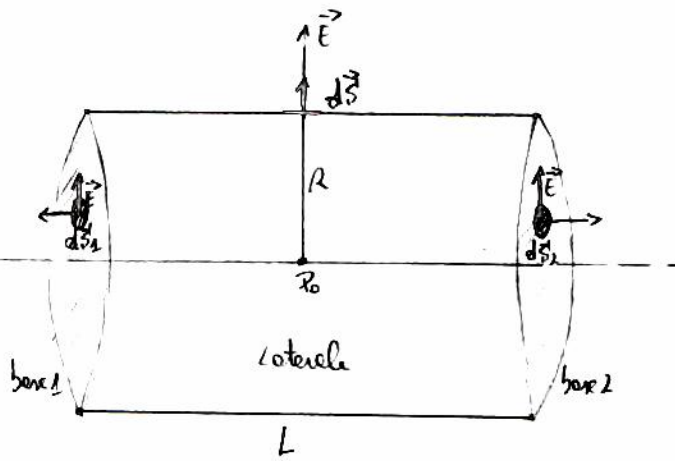
- Individuare la distribuzione continua di cariche e il punto in cui calcolare il campo elettrostatico,
- Scegliere una superficie Gaussiana, ovvero una qualsiasi superficie chiusa che contenga la distribuzione di cariche ed il punto in cui si calcola il campo elettrostatico (le scelte se eseguite correttamente risolvono il problema),
- Calcolare il flusso del campo elettrostatico attraverso la definizione di flusso:  $\Phi_E(S) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$
- Calcolare il flusso del campo elettrostatico attraverso il th di Gauss:  $\Phi_E(S) = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0}$
- Equilibrare i due termini e ricavare l'espressione del campo elettrostatico

CALCOLO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA ALCUNE CONFIGURAZIONI (DISTRIBUZIONI CONTINUE) DI CARICA UTILIZZANDO IL TEOREMA DI GAUSS

1. CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN FILA RETTILINEA INDEFINITA, UNIFORMEMENTE CARICA:

Il campo elettrostatico generato da un filo rettilineo infinito, uniformemente carico:

Scegliamo una superficie Gaussiana cilindrica di raggio  $R$  e lunghezza  $L$ .



$$\Phi_E(S) = \int_{base 1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{base 2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{laterale} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

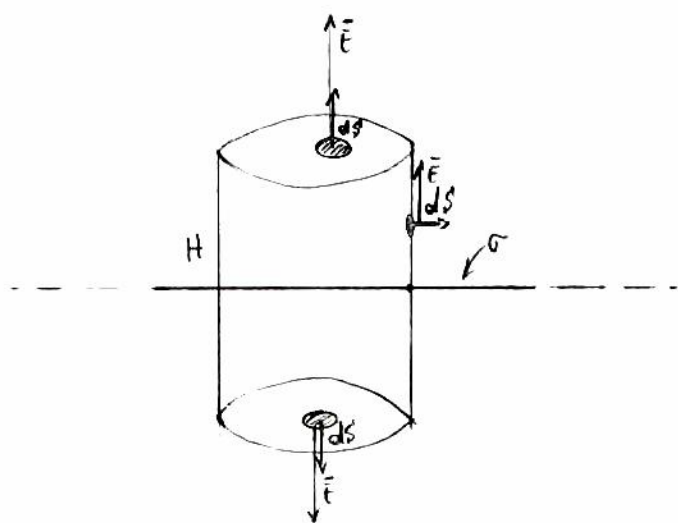
$$\int_{base 1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{base 2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \left[ \text{I vettori } \vec{E} \text{ e } d\vec{S} \text{ sono perpendicolari, per cui il prodotto scalare } \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ è nullo} \right]$$

$$\Phi_E(S) = \int_{laterale} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad \vec{E} \text{ uniforme} \Rightarrow \Phi_E(S) = \vec{E} \cdot \int_{laterale} d\vec{S} = E \cdot 2\pi R \cdot L$$

$$\Phi_E(S) = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0}, \quad Q_{INT} = \lambda \cdot L \Rightarrow \Phi_E(S) = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \Phi_E(S) = E \cdot 2\pi R \cdot L \\ \Phi_E(S) = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E \cdot 2\pi R \cdot L = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R}$$

② Camp elettrostatico generato da un filo indefinito, uniformemente carico



$$\varphi_e(S) = \int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \phi \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per ogni superficie elementare della superficie laterale} \\ \text{del cilindro, il vettore di orientamento della superficie} \\ \text{è ortogonale a quello del campo elettrico, per cui il} \\ \text{prodotto scalare è sempre nullo} \end{array} \right.$$

$$\int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il campo elettrostatico è uniforme e} \\ \text{le superfici di base sono uguali} \end{array} \right.$$

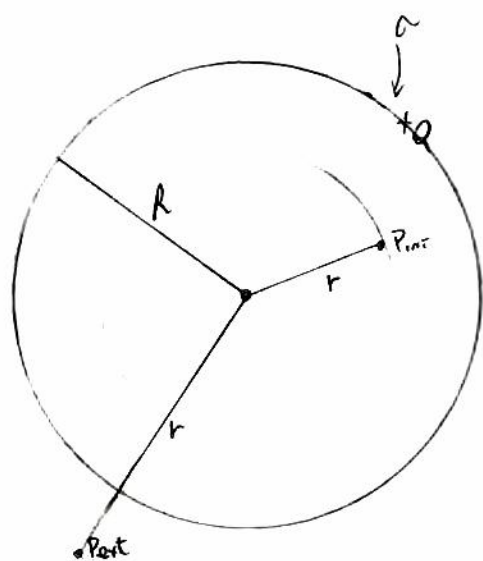
$$\varphi_e(S) = 2 \cdot \int_{\text{base}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \cdot E \int_{\text{base}} dS = 2 \cdot E \cdot S_b$$

$$\varphi_e(S) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S_b}{\epsilon_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_e(S) = 2 \cdot E \cdot S_b \\ \varphi_e(S) = \frac{\sigma \cdot S_b}{\epsilon_0} \end{array} \right. \Rightarrow 2 \cdot E \cdot S_b = \frac{\sigma \cdot S_b}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

③ Camp elettrostatico generato da una carica uniformemente distribuita su una superficie sferica



p.to p interno alla sfera  $\rightarrow r < R$

p.to p esterno alla sfera  $\rightarrow r > R$

$$\sigma \text{ uniforme} = \frac{dQ}{dS} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

I° caso - P\_int interno alla sfera (scelgo una superficie sferica concentrica S' con raggio  $r < R$  passante per il punto P\_int e calcolo il flusso del campo elettrostatico)

$$\varphi_e(S) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{\text{INT}} = \phi \quad \varphi_e(S) = \phi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_e(S) = \phi \\ \varphi_e(S) = E \cdot 4\pi r^2 \end{array} \right. \Rightarrow E = \phi$$

$$\varphi_e(S) = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2$$

Il campo elettrostatico è nullo in tutti i punti interni alla sfera

II° caso - P\_ext esterno alla sfera (scelgo una superficie sferica concentrica S' con raggio  $r > R$  passante per il punto P\_ext e calcolo il flusso del campo elettrostatico)

$$\varphi_e(S) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0}$$

$$\varphi_e(S) = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_e(S) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} \\ \varphi_e(S) = E \cdot 4\pi r^2 \end{array} \right. \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_{\text{INT}}}{r^2}$$

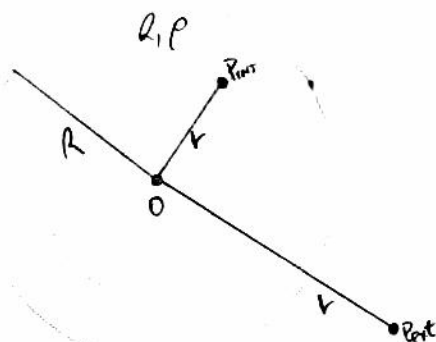
Assipilofendo:

16

$$E = \begin{cases} 0, & r < R, \text{ interno delle sfere} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R, \text{ esterno delle sfere} \end{cases}$$

N.B.: All'esterno delle sfere il campo si comporta come se le cariche fossero tutte concentrate nel centro.

Il campo elettrostatico di una carica uniformemente distribuita in una sfera



1° caso -  $r < R$  (interno sfere)

$$\begin{aligned} \Phi_E(S) &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} & \Phi_E(S) &= E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 \\ \begin{cases} \Phi_E(S) &= \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \\ \Phi_E(S) &= E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} & \Rightarrow & \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} r & \left| \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} r \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \right. \end{aligned}$$

2° caso -  $r > R$  (esterno sfere)

$$\begin{aligned} \Phi_E(S) &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} & \Phi_E(S) &= E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 \\ \begin{cases} \Phi_E(S) &= \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \\ \Phi_E(S) &= E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} & \Rightarrow & \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} & \left| \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right. \end{aligned}$$

Assipilofendo:

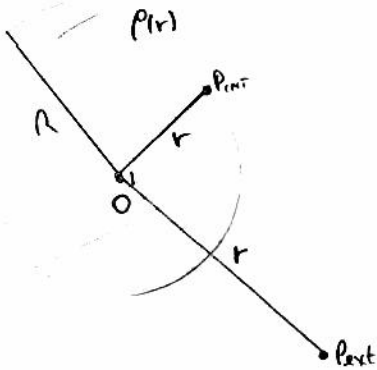
$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3}, & r < R, \text{ interno delle sfere} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, & r > R, \text{ esterno delle sfere} \end{cases}$$

N.B.: All'esterno delle sfere il campo si comporta come se le cariche fossero tutte concentrate nel centro.



⑤ Camp elettrostatico di una carica  $Q$  distribuita in una sfera d'raggio  $R$  con densità volumica  $\rho(r)$ .

17



$$Q = \int_0^R \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

I° caso -  $r < R$  (interno sfera)

$$\varphi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 \quad \varphi_E(S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \varphi_E(S) = E \cdot 4\pi r^2 \\ \varphi_E(S) = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

II° caso -  $r > R$  (esterno sfera)

$$\varphi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 \quad \varphi_E(S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^R \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \varphi_E(S) = E \cdot 4\pi r^2 \\ \varphi_E(S) = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{Q}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Risultando:

$$E = \begin{cases} \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{r^2}, & r < R, \text{ interno sfera} \\ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R, \text{ esterno sfera} \end{cases}$$

N.B.: Anche per la distribuzione di carica sferica si può calcolare il campo elettrico con la legge di Gauss.



# Distribuzione delle cariche elettriche in un conduttore isolato

18

- Se somministriamo ad un conduttore una carica  $Q$ , dopo un certo tempo il sistema raggiungerà una configurazione di equilibrio: in qualsiasi volume elementare all'interno del conduttore non c'è più carica in movimento, perciò:

$$\vec{E} = \rho \cdot \vec{E} \quad \vec{E} = 0 \text{ (qualunque)} \quad \rho \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$$

Il campo elettrostatico è nullo in ogni punto interno del conduttore

- Consideriamo ora una superficie Gaussiana  $S$ , interna al conduttore. Vogliamo determinare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie  $S$  utilizzando direttamente la densità di carica e il Teorema di Gauss:

$$\Phi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{per punto scelto in precedenza il campo elettrostatico} \\ \text{è nullo all'interno del conduttore, perciò:} \end{array} \right. \Rightarrow \Phi = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{INT} = \Phi$$

- Concludo che la carica interna ad  $S$  è nulla. Per una tale considerazione solo per qualsiasi superficie  $S$  interna al conduttore, allora le cariche somministrate non può che trovarsi sulle superficie esterna del conduttore, distribuite con una densità superficiale  $\sigma$  che, in generale, varia da punto a punto della superficie del conduttore.

## Teorema di Coulomb

- Consideriamo un conduttore carico con una densità di carica superficiale  $\sigma$ . Vogliamo determinare il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze di un punto  $P$  della superficie del conduttore.

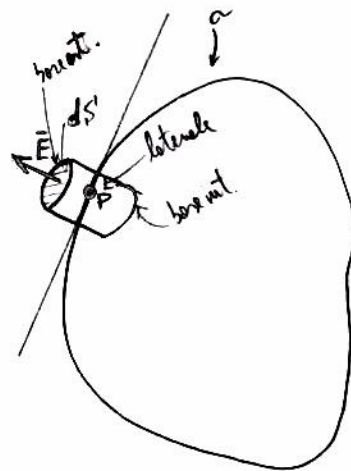
Il campo risulta perpendicolare al piano tangente alla superficie del conduttore nel punto  $P$  ed orientato verso l'esterno se  $\sigma$  è positiva in quel punto. Applicheremo il teorema di Gauss ad un cilindro elementare di base  $dS$  ed altezza infinitesima, disposto perpendicolarmente al piano tangente:

$$\Phi_E(S) = \cancel{\oint_{base\ ext.} \vec{E} \cdot d\vec{S}} + \cancel{\oint_{base\ int.} \vec{E} \cdot d\vec{S}} + \oint_{laterale} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_{laterale} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{base\ ext.} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_E(dS) = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS$$

$$\oint dQ_{INT} = \sigma dS$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \sigma dS \Rightarrow E \cdot dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$



Abbiamo così il teorema di Coulomb:

- Il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze del punto  $P$  della superficie di un conduttore vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{n} \quad \left| \begin{array}{l} \sigma \rightarrow \text{densità superficiale di carica in } P \\ \hat{n} \rightarrow \text{vettore della normale uscente dal conduttore in } P (\perp \text{ al piano tangente in } P) \end{array} \right.$$

- Consideriamo il camp elettrostatico generato da una qualsiasi distribuzione di cariche. Inducendo con  $L$  una linea chiusa qualunque, la circolazione del camp lungo di essa risulta essere nulla:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{La circolazione di un camp vettoriale è nulla se e solo se il camp vettoriale è conservativo.} \\ \text{Per conseguenza, possiamo affermare che il camp elettrostatico è conservativo.} \end{array} \right.$$

- Consideriamo una distribuzione continua di carica  $\rho$  e fissiamo una superficie chiusa  $S$ , che recalchi il vol.  $V$ . Per il th. di Gauss:

$$\varphi_E(S) = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \varphi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ Q_{INT} = \int_V \rho dV \end{array} \right. \Rightarrow \overset{(1)}{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \overset{(2)}{\int_V \rho dV \cdot \frac{1}{\epsilon_0}} \quad \left| \begin{array}{l} (1) \text{ per il th. delle divergenze:} \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV = \int_V \rho dV \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{TH. DI GAUSS IN FORMA LOCALE}$$

$$\bullet \text{ Camp elettrostatico conservativo} \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{rot} \vec{E} = 0} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{Th. di Stokes} \end{array}$$

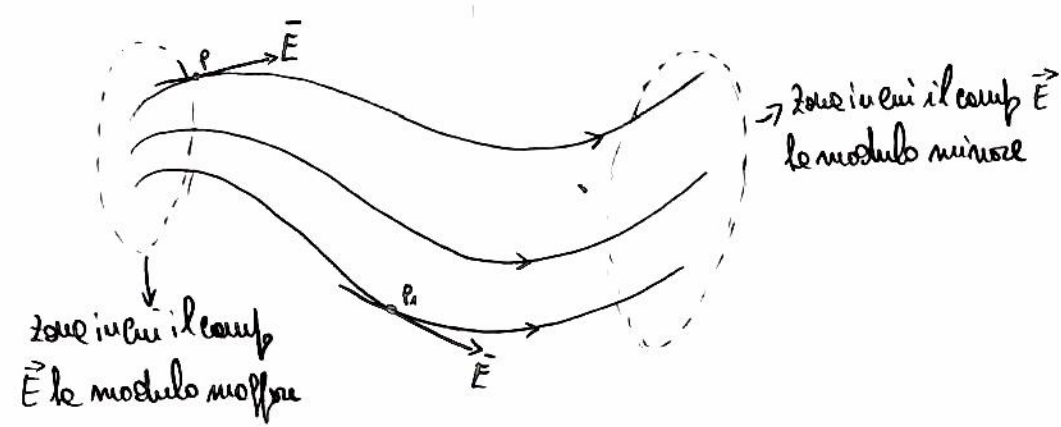
Se il rotore di un camp vettoriale è nullo si dice che il camp è irrotazionale. Un camp vettoriale conservativo è irrotazionale. Il camp elettrostatico è quindi conservativo, in quanto la sua circolazione lungo una qualsiasi linea chiusa  $L$  è nulla; in altre parole la conservatività si esprime dicendo che  $\vec{E}$  è irrotazionale, ovvero  $\text{rot} \vec{E} = 0$ .

In breve:

- Il camp elettrostatico è nullo in tutti i punti interni ad un conduttore carico;
- La carica accumulata ad un conduttore si distribuisce lungo la sua superficie con una densità superficiale di carica  $\sigma$ , in genere variabile (NFI);
- Per il th. di Coulomb, il camp elettrostatico in un pto  $P$  nella immediata vicinanza di un conduttore carico è pari a:  $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{n}$ , dove  $\hat{n}$  è il vettore perpendicolare al punto  $P$  sulla superficie passante per il pto  $P$  considerato;
- Il camp elettrostatico  $\vec{E}$  è conservativo, in quanto la sua circolazione lungo una qualsiasi linea chiusa  $L$  è nulla:  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ;
- Il th. di Gauss è esprimibile in forma locale in termini di divergenza:  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ;
- È possibile esprimere in forma locale anche la conservatività del camp elettrostatico utilizzando l'operatore differenziale rotore:  $\text{rot} \vec{E} = 0$ .



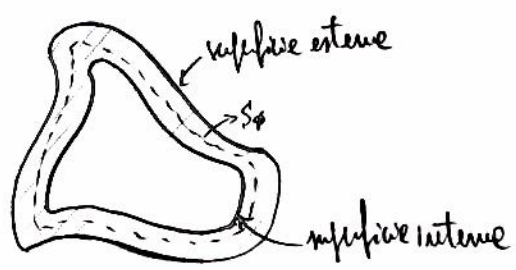
- Rappresenteremo un metodo per determinare il campo elettrostatico generato da una qualsiasi distribuzione di cariche. Essi sono distribuiti in modo che in ogni punto delle linee il campo elettrostatico risulta tangente ed esce:



- Le dove le linee sono più fitte l'intensità del campo è maggiore, dove sono più distanziate l'intensità del campo è minore
- La direzione del campo in un punto P appartenente alle linee di flusso è quella del punto tangente alle linee nel punto considerato, con verso uguale a quello delle linee stesse
- Per un punto passano una ed una sola linea di flusso, una sola volta

SISTEMA ELETTROSTATICO

- Si consideri un conduttore cavo. Approssimiamo punto una certa carica, presente in distribuzione sulla sua superficie esterna con densità  $\sigma$ . Analizziamo ciò che accade all'interno della cavità:



Se considero una superficie  $S_0$  contenuta nel conduttore (tra le superfici interne ed esterne), sappiamo che il campo elettrostatico è nullo, per il t.h. di Gauss:

$$\oint_C(S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{int} = 0$$

Quindi le cariche interne sulle superfici  $S_0$  è nulla. Ciò però non esclude che possano trovarsi, sulle superfici interne, delle cariche positive e negative tali per cui la loro somma sia nulla. Dimosteremo che non si possono presentare situazioni.

- Consideriamo lo stesso conduttore cavo ed una linea  $L$  che si estende per una parte nel conduttore (tra le due superfici) e per una parte nella cavità. Ipotesi: la presenza di cariche sulle superfici interne del conduttore non c'è.



Il contributo alle cariche dovuto alla parte della linea interna al conduttore (tra le 2 superfici) è nullo, dato che il campo elettrico è nullo; ma il contributo dato dalla parte della linea interna alla cavità non è diverso da  $\phi$  (se non presenti sulle cavità,  $\phi$  è un campo elettrico). Per cui si avrà:

$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq \phi$ , che è impossibile, dato che  $\vec{E}$  è conservativo e vale:  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \phi$



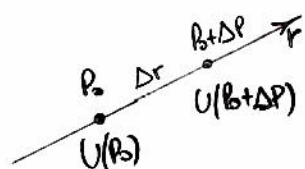
• Quindi non vi è alcuna carica sulle superficie interne del conduttore. 24

- Se all'interno c'è un conduttore con carica  $+Q$ , sulle superficie interne elle cariche redistribuiscono una carica  $-Q$ . Tale situazione di induzione non viene in nessun modo modificata da quanto vi è all'esterno.
- Infine, le cariche fanno da schermo elettrostatico: conservano inalterate le situazioni di equilibrio interno contro una qualunque carica esterna.

• Se  $U$  una funzione scalare definita in una regione  $\Omega$  dello spazio, l'insieme dei valori assunti da  $U$  in ogni punto  $P$  di  $\Omega$  costituisce un campo scalare. Un campo scalare è quindi una funzione reale del punto, indicata dalle coordinate cartesiane  $x, y, z$ ;

• Se  $A$  una funzione vettoriale definita in una regione  $\Omega$  dello spazio, l'insieme di vettori (vettori) assunti da  $A$  in ogni punto  $P$  di  $\Omega$  costituisce un campo vettoriale

Se  $U = U(P)$  una funzione scalare definita in una regione  $\Omega$  dello spazio, lungo una generica direzione indicata dal vettore  $r$ , nel passare dal punto  $P_0$  al punto  $P_0 + \Delta P$  la funzione passa dal valore  $U(P_0)$  al valore  $U(P_0 + \Delta P)$ , con  $U(P_0 + \Delta P) > U(P_0)$ :



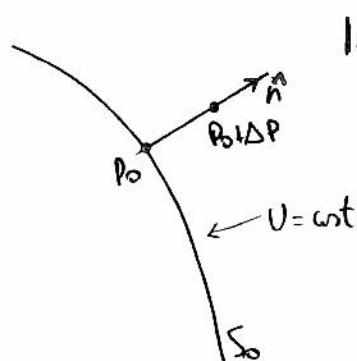
Si definisce derivata direzionale della funzione  $U$  nel punto  $P_0$  lungo la direzione  $r$ :

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{P_0} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{U(P_0 + \Delta P) - U(P_0)}{\Delta r}$$

se il lim esiste ed è finito

• La derivata direzionale di una funzione scalare rappresenta quindi la variazione di un campo scalare lungo la direzione  $r$  finita da un vettore

• Se  $S_0$  una superficie immerse in un campo scalare  $U$ , costante in tutti i punti di  $S_0$ . Rappresento  $\hat{n}$  il vettore normale a  $S_0$  orientato nel verso dei valori crescenti di  $U$ , si sceglie un punto  $P_0$  di  $S_0$  e una distanza  $\Delta P$  da  $P_0$  tale che:  $U(P_0 + \Delta P) > U(P_0)$  lungo la direzione  $\hat{n}$ :



$$|\hat{n}| = 1 (\text{norma})$$

Il gradiente di  $U$  in  $P_0$  è il vettore diretto lungo  $\hat{n}$  che ha per modulo la derivata direzionale di  $U$  lungo  $\hat{n}$ :

$$\vec{\text{grad}}(U)|_{P_0} = \hat{n} \cdot \left. \frac{dU}{dr} \right|_{P_0}$$

• Effettuando il gradiente in tutti i punti di  $\Omega$  si definisce il campo vettoriale  $\vec{\nabla} U$ .

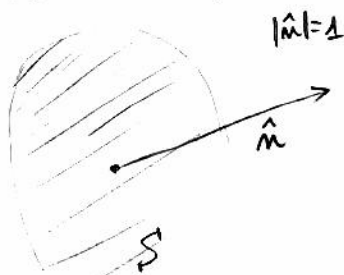
• Noto il gradiente è possibile individuare la derivata direzionale lungo qualsiasi direzione

• La direzione del gradiente di un campo scalare è solitamente scelta come quella di massima variazione delle funzione  $U$ , ovvero la direzione lungo la quale è massima la derivata direzionale della funzione

• Se  $A = \nabla U$ , allora la funzione scalare  $U$  è definita potenziale della funzione vettoriale  $A$ . 23

• Considerando le derivate direzionali di una costante nulla, allora possiamo definire un altro campo vettoriale  $B$  definito come  $B = U + U_0$ , con  $U_0$  costante, è un potenziale per  $A$ :  $B = U + U_0$   $\nabla B = \nabla U = A$  (la costante non altera il valore delle derivate)

• Se  $\vec{A}$  un campo vettoriale definito in uno spazio  $\Omega$  ed  $S$  una superficie aperta immersa in  $\Omega$ . Rappresento  $\hat{n}$  come il vettore normale uscente da  $S$ :

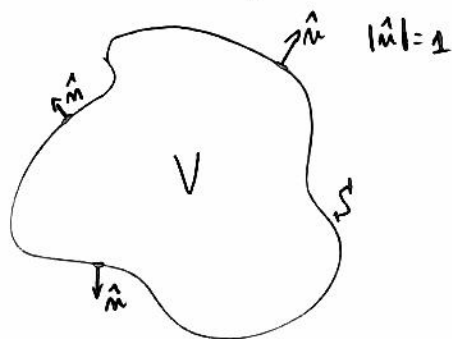


Rappresento il flusso  $\Psi_S$  del campo vettoriale  $\vec{A}$  attraverso la superficie

$$S \text{ come } \Psi_A(S) = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\Psi_A(S) = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S \vec{A}_n \, dS = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

• Consideriamo ora una superficie chiusa  $S$  immersa in  $\Omega$ , con la normale uscente dal volume  $V$ :

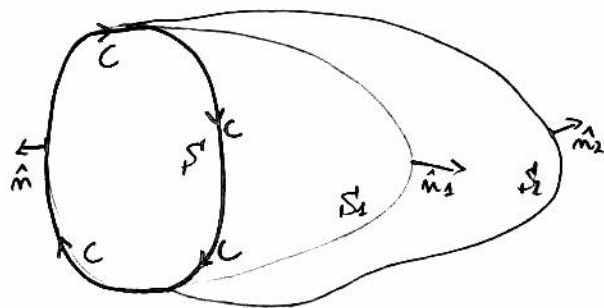


Il flusso attraverso la superficie chiusa  $S$  del campo vettoriale

$$\vec{A} \text{ è: } \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

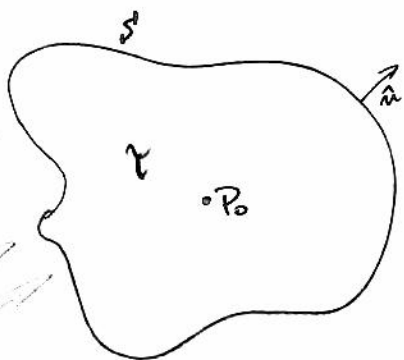
• Se  $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = 0$  allora deduce che  $\vec{A}$  è conservativo nel flusso

• Se un campo vettoriale  $\vec{A}$  è conservativo, il flusso attraverso tutte le superfici aperte delimitate da una stessa curva chiusa  $C$  ha lo stesso valore:





- Se  $S$  è una superficie chiusa, contenente il volume  $\gamma$ , immersi in un campo vettoriale  $A$  e un punto  $P_0$  interno ad essa:



La densità divergenza di  $A$  in  $P_0$  è data da:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \emptyset} \frac{\oint_{\gamma} A \cdot n \, dS}{\gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{P_0}$$

La densità è definita prendendo collassare il volume  $\gamma$  nel punto  $P_0$

- La densità rappresenta un flusso uscente dall'unità di volume. Integrando la densità su tutto il volume, quindi, si ottiene il flusso uscente dall'intera superficie chiusa che racchiude il volume in cui la densità è stata calcolata.

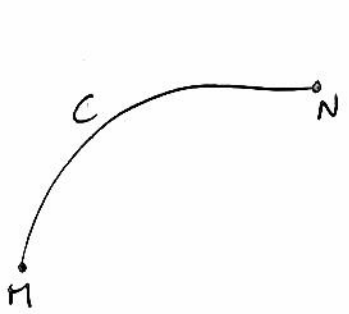
- Le espressioni precedentemente enunciate se sotto il nome di teorema di Gauss:

$$\iiint_{\gamma} \nabla \cdot \vec{A} \, d\tau = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

vale:

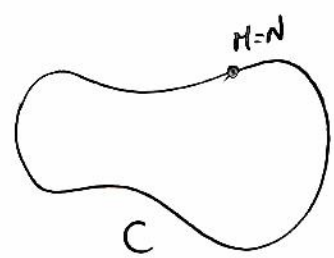
l'integrale della densità di  $A$  sul volume  $\gamma$  è uguale al flusso di  $A$  lungo la superficie

- Consideriamo un campo vettoriale  $A$  definito su  $\Omega$  e  $C$  una curva in esso contenuta. Assumendo un verso di percorrenza su  $C$ , definiamo l'integrale curvilineo:



$$I = \int_M^N \underline{A} \cdot \underline{l} \, d\ell$$

- Se la curva è chiusa,  $M=N$ :

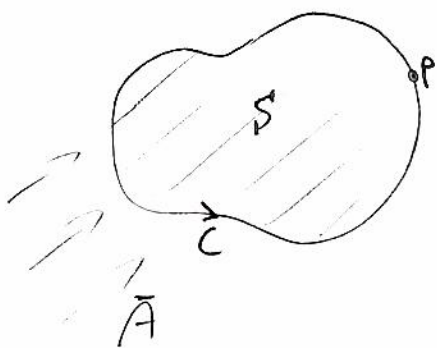


$$\int_M^N \underline{A} \cdot \underline{l} \, d\ell = \oint_C \underline{A} \cdot \underline{l} \, d\ell$$

che rappresenta la circuitazione del campo  $A$  lungo la linea chiusa  $C$ .

Quindi la circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa è l'integrale del campo lungo la linea.

- Consideriamo una funzione vettoriale  $A$  (camp vettoriale) definita in uno spazio  $\mathbb{R}^3$  e una linea chiusa  $C$  che delimita una superficie  $S$ :



lineare integrale di  $A$  è:  $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

definisce:  $\lim_{S \rightarrow \emptyset} \frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}}{S} = \text{rot}(\vec{A})$

il rotore può essere visto come una densità di circolazione in un'area di superficie

- Vali il Th. di Stokes (o della circolazione):

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Per una funzione conservativa si definisce il lavoro come la differenza di energia potenziale ( $U_A - U_B$ ). Per un campo di forza conservativo la funzione scalare se sotto il nome di potenziale (P.M.A) che, nel caso del campo elettrostatico è definito potenziale elettrostatico  $V$

Nota la corrispondenza tra il campo elettrostatico vettoriale  $\vec{E}$  e il campo scalare potenziale elettrostatico  $V$ , è possibile descrivere lo stesso fenomeno fisico in termini di campo elettrostatico o di potenziale elettrostatico.

In breve:

$$\vec{F}_e = - \text{grad } U(x, y, z) \longrightarrow \vec{E} = - \text{grad } V(x, y, z)$$

$$\text{grad } V = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad \vec{E} = - \text{grad}(V) = - \vec{\nabla} V$$

La relazione inversa che permette di passare dal campo vettoriale  $\vec{E}$  e quello scalare  $V$  è data da integrali.

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Eseguendo il calcolo integrale del campo elettrostatico si possono calcolare la differenza di potenziale ( $V_A - V_B$ ) tra il p.to di partenza e il p.to di arrivo. In base a come si scelgono i punti A e B si hanno infiniti potenziali di

$\vec{E}$ . È possibile fissare, ad esempio, un p.to di partenza A, facendo variare B in tutto lo spazio. In questo modo si otterrebbe un unico campo scalare, ovvero come varrebbe il potenziale da A a tutti i punti dello spazio.

Scegliendo più il p.to A, si ottiene un nuovo campo scalare potenziale.

In altre parole, il potenziale è definito e meno di una costante.

Il fatto che il potenziale non è definito e meno di una costante non altera in nessun modo il valore del campo elettrico, in quanto la presenza delle costanti non altera in nessun modo il valore del gradiente.

In BREVE:

Essendo  $\vec{E}$  un campo conservativo, esso è esprimibile come il gradiente di un campo scalare:  $\vec{E} = - \text{grad } V$ .

Il campo scalare  $V$  è definito potenziale elettrostatico, che rappresenta il lavoro per unità di carica compiuto da

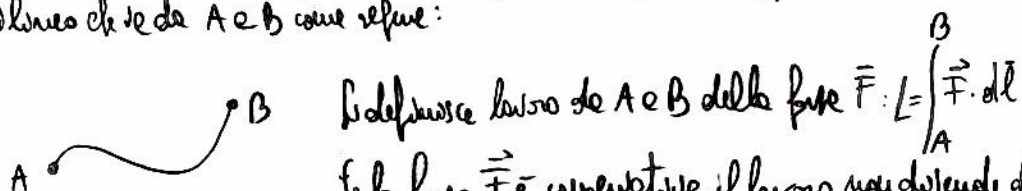
$\vec{E}$  per spostare, fissando, una carica tra due punti dello spazio.

La funzione potenziale è definita e meno di una costante arbitraria.



# PREMESSA MATEMATICA 2: DESCRIZIONE DI FORTE CONSERVATIVE: ( $\vec{F}$ conservativa) (28)

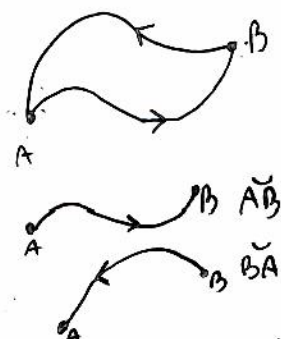
- Consideriamo una forza  $\vec{F}$  funzione dello spazio e due punti di applicazione A e B di  $\vec{F}$ . Possiamo definire un percorso qualsiasi che va da A a B come segue:



Si definisce lavoro da A a B della forza  $\vec{F}$ :  $L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$

Se la forza  $\vec{F}$  è conservativa il lavoro non dipende dallo specifico percorso ma delle posizioni dei punti A e B.

- Questo è dimostrabile partendo dal concetto di conservatività di una forza:  $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ ,  $\forall L$  chiuso, n.c.
- Si vuol dire che, considerando un altro percorso alternativo da A a B, si può fare un unico percorso  $P$  del tipo  $\overline{ABA}$  chiuso per lui solo.



$\oint_{ABA} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ , ma:  $\overline{ABA} = \overline{AB} \cup \overline{BA}$ , cioè:

$$\oint_{ABA} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Essendo facile rilevare quale sia l'unico percorso alternativo  $\overline{BA}$  scelto, allora l'integrale è indipendente dal percorso.
- Il lavoro da A a B di una forza conservativa è quindi esprimibile come la differenza di una funzione in A e in B:

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = U_A - U_B$$

La funzione  $U$  si detta il nome di energia potenziale legata alla forza.

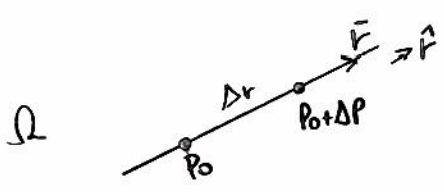
## DEFINIZIONE DEL POTENZIALE ELETTROSTATICO

- Le considerazioni in P.H. 1 un camp. scalare è esprimibile attraverso un camp. vettoriale attraverso la relazione  $\vec{A} = \vec{\nabla} U$ . Ciò è valido anche per il camp. elettrostatico  $\vec{E}$ , anch'esso esprimibile come il gradiente di una funzione scalare  $V$  che è definita potenziale elettrostatico:  $\vec{E} = -\text{grad}(V) = -\vec{\nabla}(V)$ .
- Insomma un'idea dimensionale ricordando quanto detto nella P.H. 2: Abbiamo parlato di una funzione forza  $\vec{F}$ , ma ora veniamo in presenza di un camp. ( $\vec{E}$ ) che è una forza per unità di carica. Per tale motivo, parleremo di lavoro per unità di carica:

$$\frac{L}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B \quad \text{e} \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

PREMESSA MATEMATICA: PASSAGGIO DA UN CAMPO SCALARE AD UN CAMPO VETTORIALE

- Se  $U$  una funzione scalare definita in una regione  $\Omega$  dello spazio; l'insieme di valori assunti da  $U$  in ogni punto  $P$  di  $\Omega$  costituisce un campo scalare. Un campo scalare è quindi una funzione scalare del punto, individuato dalle coordinate cartesiane  $x, y, z$ ;
- Se  $A$  una funzione vettoriale definita in una regione  $\Omega$  dello spazio; l'insieme di vettori (vettori) assunti da  $A$  in ogni punto  $P$  di  $\Omega$  costituisce un campo vettoriale
- Se  $U = U(P)$  una funzione scalare definita in una regione  $\Omega$  dello spazio; fissiamo una generica direzione indicata dal vettore  $\hat{r}$ ; nel passare dal punto  $P_0$  al punto  $P_0 + \Delta P$  la funzione passa dal valore  $U(P_0)$  al valore  $U(P_0 + \Delta P)$ , con  $U(P_0 + \Delta P) > U(P_0)$ :



Si definisce derivata direzionale delle funzioni  $U$  nel punto  $P$  lungo la direzione  $r$ :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{P_0} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{U(P_0 + \Delta P) - U(P_0)}{\Delta r}$$

La derivata direzionale di una funzione scalare rappresenta quindi la variazione di un campo scalare lungo la direzione fissata da un vettore

- Si definisce gradiente di  $U$  in  $P_0$  il vettore diretto lungo una direzione fissata  $\hat{n}$  che ha per modulo la derivata direzionale di  $U$  lungo  $\hat{n}$ :

$$\text{grad}(U) \Big|_{P_0} = \hat{n} \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{P_0}$$

Effettuando il procedimento in tutti i punti di  $\Omega$  si definisce il campo vettoriale  $A = \vec{\nabla}(U)$ . [ $\vec{\nabla}$  è il simbolo del gradiente]

La direzione del gradiente di un campo scalare è solitamente scelta come quella di massima variazione della funzione  $U$ , ovvero la dove è massima la derivata direzionale di  $U$ .

- Se  $A = \vec{\nabla} U$ , allora la funzione scalare  $U$  è definita potenziale della funzione vettoriale  $A$ .
- Essendo la derivata direzionale di una costante nulla, allora qualsiasi altro campo scalare  $V$  definito come  $V = U + U_0$ , con  $U_0$  costante, è un potenziale per  $A$ :  $V = U + U_0 \Rightarrow \vec{\nabla} V = \vec{\nabla} U = \vec{A}$  (le costanti non alterano il valore del gradiente)
- Il gradiente in coordinate cartesiane vale:  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} U \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} U \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} U \hat{k} \right)$



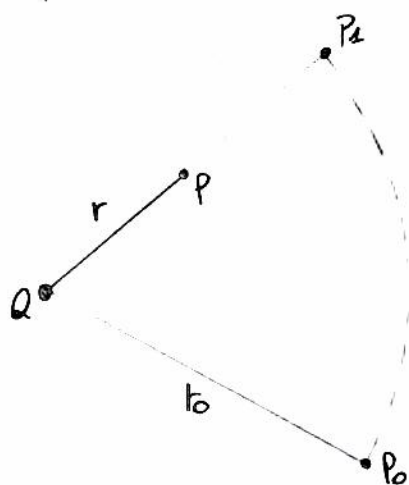
Essendo il potenziale definito e meno di una costante, non interessa calcolare una differenza di potenziali, tra un punto P e un punto  $P_0$ :

$$\Delta V_{PP_0} = V_P - V_{P_0} = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_P = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{P_0}$$

Scegliendo  $P_0$  all'infinito, otteniamo  $V_{P_0} = \phi$ , per cui:  $V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

1. Potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme:

2. > carica puntiforme  $Q \rightarrow$  punto esistente reale P  $P_0 \rightarrow$  punto fittizio esistente  $r_0$  da Q



La differenza di potenziale  $\Delta V_P = V_P - V_{P_0}$  si ottiene integrando il campo elettrostatico lungo un qualsiasi percorso che va da P a  $P_0$ . Grazie, per comodità di calcolo, al percorso costituito dal tratto rettilineo  $\overline{PP_1}$  e dall'arco  $\overline{P_1P_0}$ :

$$\overline{PP_0} = \overline{PP_1} \cup \overline{P_1P_0}$$

$$\int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{P_0}$$

Il secondo integrale è nullo in quanto il campo elettrostatico  $\vec{E}$  ha direzione perpendicolare a tutti i tratti dell'arco  $\overline{P_1P_0}$  lungo l'arco  $\overline{P_1P_0}$ . Semplice il tratto rettilineo  $\overline{PP_1}$  in cui:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \text{ da P a } P_0, \text{ per il cammino in Q: } V_P = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{P_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_r^{r_0} \frac{1}{r^2} dr + V_{P_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot (-) \left[ \frac{1}{r} \right]_r^{r_0} + V_{P_0} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] + V_{P_0}. \text{ Portando } P_0 \text{ all'infinito, } V_{P_0} = \phi, \text{ per cui: } \boxed{V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}$$

Il risultato può essere esteso, per la sovrapposizione degli effetti, ad una distribuzione di N cariche puntiformi. Date N cariche  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ , il potenziale nel punto P è dato dalla somma dei vettori  $\vec{r}_i$  che vanno da ciascuna carica  $Q_i$  al punto P, e dalla loro distanza  $r_i$  dall'origine:

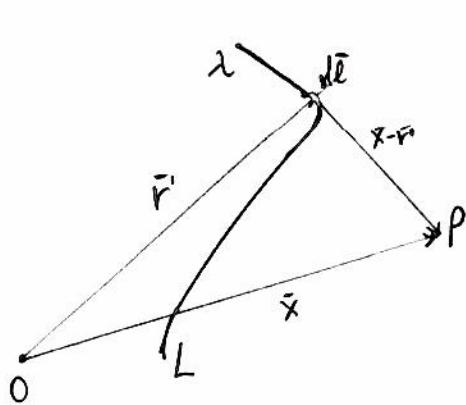
$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



• Potenziale elettrostatico generato da una distribuzione continua di cariche: 30

Il risultato ottenuto per una distribuzione discreta di cariche puntiformi può essere esteso ad una distribuzione continua di cariche di tipo lineare, superficiale e volumica. Si considera che la sommatoria viene sostituita da un integrale esteso a tutte le distribuzioni continue di cariche:

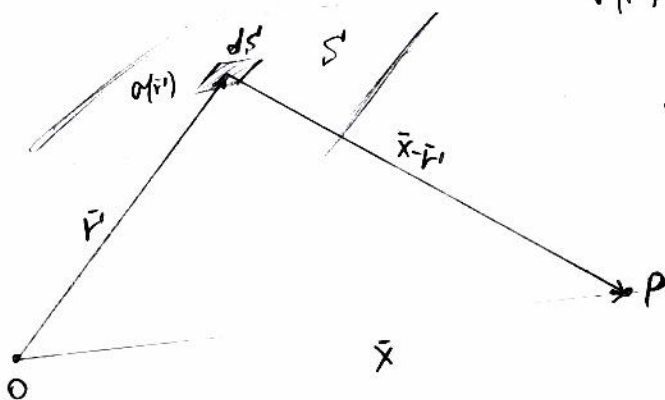
- Distribuzione lineare di cariche:



$$\lambda = \lambda(\vec{r}') : dq = \lambda(\vec{r}') \cdot d\ell$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') \cdot d\ell}{|\vec{x} - \vec{r}'|}$$

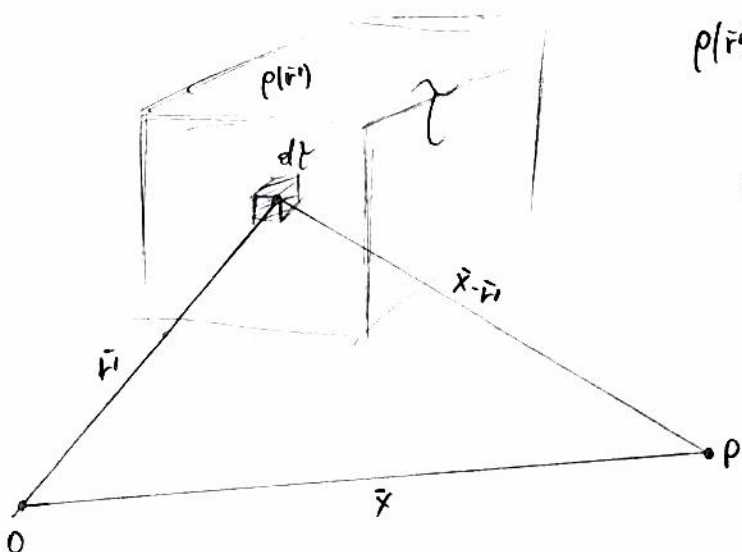
- Distribuzione superficiale di cariche:



$$\sigma(\vec{r}') : dq = \sigma(\vec{r}') \cdot dS$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') \cdot dS}{|\vec{x} - \vec{r}'|}$$

- Distribuzione volumica di cariche:



$$\rho(\vec{r}') : dq = \rho(\vec{r}') \cdot d\tau$$

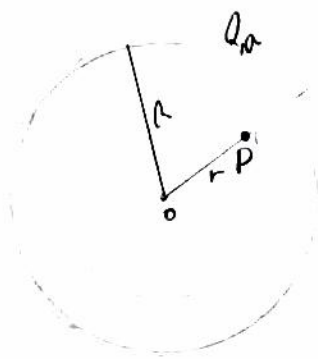
$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot d\tau}{|\vec{x} - \vec{r}'|}$$

Di seguito verranno calcolati i potenziali elettrostatici generati da una carica  $Q$  uniformemente distribuita, dapprima sulla superficie sferica e poi all'interno della sfera (nel suo volume). Ciò viene fatto partendo dall'espressione del campo elettrostatico generato dalla configurazione di carica ed integrandolo tra due punti  $P$  e  $P_0$  scelti opportunamente. È utile ricordare che l'espressione del campo elettrostatico in punti così è diversa per due punti, uno interno alla sfera ed uno esterno ad essa.

Per tale motivazione, anche il potenziale elettrostatico avrà espressioni diverse per punti interni ed esterni della sfera. Come fatto per la determinazione del campo elettrostatico, considereremo una superficie concentrica di raggio  $r$ , in modo che, scelto il punto  $P$  di interesse, questo ritrovi nella superficie considerata. Per un punto interno alla sfera di raggio  $R$ , sceglieremo un  $r < R$  ( $0 < r < R$ ), per un punto esterno alla sfera un  $r > R$ .

• Potenziali elettrostatici generati da una carica  $Q$  uniformemente distribuita su una superficie sferica:

- P interno alla sfera ( $r < R$ ):

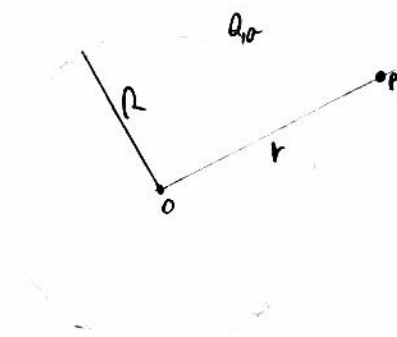


$$\vec{E}_{\text{superficie}} = \begin{cases} 0, & r < R \text{ (int. sfera)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} & \text{(ext. sfera)} \end{cases}$$

- scelto  $P_0$  all'infinito, per cui  $V_{P_0} = V_{\infty} = \phi$

$$V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \phi dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot \left[ \frac{1}{r} \right]_R^{+\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot \left[ 0 - \frac{1}{R} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$$

- P esterno alla sfera ( $r > R$ ):



$$V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{r} \right]_r^{+\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ 0 - \left(-\frac{1}{r}\right) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

In definitiva:

$$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

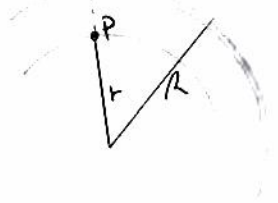
$$\rightarrow V_P = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}, & r > R \end{cases}$$

come ci si poteva aspettare, il potenziale all'interno della sfera è una costante, indipendente dal punto P scelto. Il fatto che la costante è misurabile matematicamente dal fatto che il camp.  $\vec{E}$  è il grad(V), ed il gradente di una costante è zero, che è proprio il camp. elettrostatico per punti interni alla sfera.  
Inoltre, per  $r > R$ , il potenziale si comporta come se le cariche fossero concentrate nel centro.

• Potenziale elettrostatico generato da una carica  $Q$  uniformemente distribuita in una sfera.

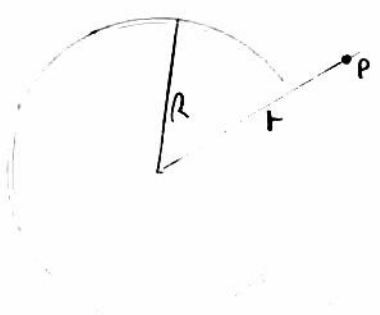
$$E_{sfe} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r, & 0 < r < R \text{ (int. sfera)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R \text{ (ext. sfera)} \end{cases} \quad \begin{matrix} \varphi_0 \rightarrow +\infty \\ V_{\varphi_0} \rightarrow \varphi \end{matrix}$$

- P. interno alla sfera ( $r < R$ ):  
 $+\infty \varphi_0$



$$\begin{aligned} V_P &= \int_P^R \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_R^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \cdot \int_r^R r dr + \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{R^3} \int_r^R r dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{R^3} \cdot \left[ \frac{r^2}{2} \right]_r^R + \left[ -\frac{1}{r} \right]_R^{+\infty} \right\} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1}{2R^3} \cdot (R^2 - r^2) - \left[ 0 - \frac{1}{R} \right] \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{(R^2 - r^2) + 2R^2}{2R^3} \right\} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{(R^2 - r^2) + 2R^2}{2R^3} \right\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^2 - r^2 + 2R^2}{2R^3} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3R^2 - r^2}{R^3} = \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \end{aligned}$$

- P. esterno alla sfera ( $r > R$ ):



$$V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad \begin{matrix} \text{(vedi caso superficie sfera)} \\ \text{(carica con } r > R) \end{matrix}$$



Indefinite:

(33)

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r, & \phi < r < R \text{ (int. sfera)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R \text{ (est. sfera)} \end{cases} \longrightarrow V_p = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right), & \phi < r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, & r > R \end{cases}$$

⚡ notare che, per l'esterno della sfera ( $r > R$ ), il potenziale si comporta come se le cariche fossero concentrate tutte al centro della sfera.

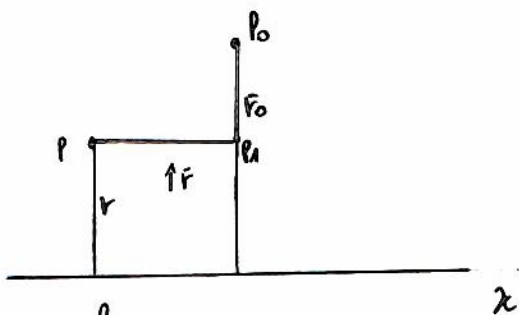
⚡ notare che il potenziale per l'int. della sfera va come  $r^2$  (coerente con la relazione  $\vec{E} = -\text{grad} V$ ), in quanto è l'integrale del campo, che va come  $r$ .

• Potenziale elettrostatico generato da un filo rettilineo, indefinito, uniformemente carico:

$\lambda \rightarrow$  densità lineare di cariche  $r \rightarrow$  distanza di P dal filo  $r_0 \rightarrow$  distanza di  $P_0$  dal filo

- scegliamo il punto  $P_0$  in una posizione finita dello spazio (non all'infinito), in quanto il filo è indefinito

- calcoliamo la differenza di potenziale tra P e  $P_0$  scegliendo il percorso:  $\overline{PP_0} = \overline{PP_1} \cup \overline{P_1P_0}$ , come da figura:



$$V_p = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E}_{\text{filo}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \hat{r} \quad \hat{r} \text{ direzione perpendicolare al filo}$$

$$V_p = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{il primo integrale è } \phi \text{ in quanto il campo elettrostatico } \vec{E} \text{ è, in tutti i punti appartenenti al percorso } \overline{PP_1}, \text{ perpendicolare, per cui il prodotto scalare } \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ è nullo lungo tutto il tratto})$$

$$V_p = \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_r^{r_0} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left| \frac{r_0}{r} \right| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left| \frac{r_0}{r} \right|$$

LA SUPERFICIE DI UN CONDOTTORE È EQUIPOTENZIALE:

34

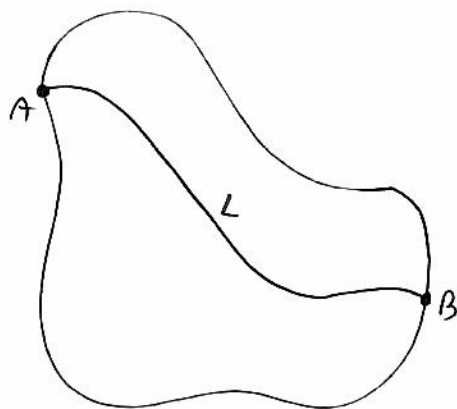
• Consideriamo due punti A e B sulla superficie di un conduttore col nome linea L, interne al conduttore, che li unisce:

$$\Delta V_{AB} = V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{E} = 0 \text{ in tutti i punti interni} \\ \text{al conduttore} \end{array} \right.$$

$$V_A - V_B = 0 \Rightarrow V_A = V_B \quad (\text{il potenziale di } \phi \text{ è una costante})$$

Quindi:

I punti della superficie di un conduttore sono allo stesso potenziale



EQUAZIONE DI POISSON

Vogliamo trovare una relazione differenziale che colleghi il potenziale elettrostatico in un p.to con la densità di carica volumica esistente in quel punto:

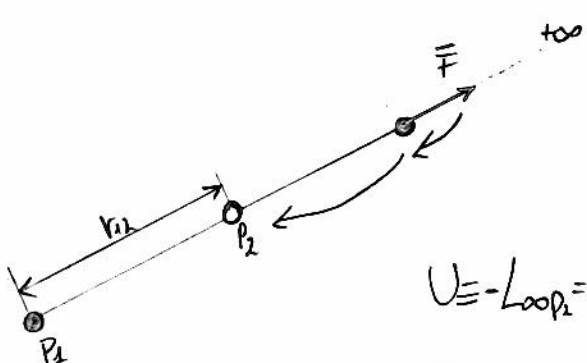
$$\vec{E} = -\text{grad } V \rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{div } (-\text{grad } V) = \rho/\epsilon_0 \rightarrow (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ che è}$$

detta equazione di Poisson

Tempe delle conservative del camp elettrostatico è possibile definire un'energia potenziale legata ad esso. Per capire meglio il concetto partiamo come esempio il camp gravitazionale: portando una molla ad una certa altezza, essa acquista un'energia potenziale gravitazionale  $U = m \cdot g \cdot h$ . Tale energia è data dal lavoro svolto per portare la molla dalle posizioni iniziali (corrispondente al caso della molla che genera il camp gravitazionale) all'ultima. Analogamente, una carica  $q$  immersa in un camp elettrostatico, se viene portata dalla posizione  $\infty$  a una certa distanza  $r$  dalla carica che genera il camp acquista un'energia elettrostatica che è uguale al lavoro compiuto contro le forze elettriche durante il camp per portare la carica in posizione  $r$ . Quindi vale:  $U = -L_{\infty, P}$ .

• Energia elettrostatica di due cariche puntiformi:

Per definire l'energia elettrostatica di due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$ , parte e distanza  $r_{12}$ , il lavoro che bisogna compiere contro le forze del camp elettrostatico per portare una carica dall'infinito alla distanza  $r_{12}$  dall'altra:

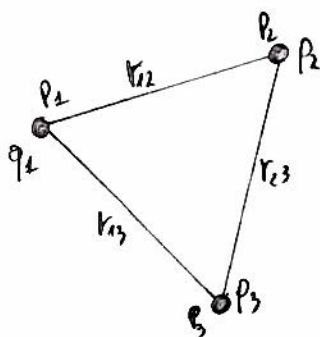


$q_1 \rightarrow$  posizione di  $q_2$   
 $L \rightarrow$  lavoro contro le forze repulsive  $\vec{F}$  per portare  $q_2$  dall' $\infty$  alla posizione  $q_2$ , distante  $r_{12}$  da  $q_1$

$$U \equiv -L_{\infty, P_2} = - \int_{\infty}^{r_{12}} \vec{F}_2 \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{\ell^2} \cdot d\ell = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 \cdot q_2 \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{1}{\ell^2} \cdot d\ell =$$

$$= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 \cdot q_2 \left[ -\frac{1}{\ell} \right]_{\infty}^{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \left( \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{\infty} \right) = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}}$$

• Energia elettrostatica di un sistema di  $N$  cariche puntiformi:



Consideriamo un sistema di 3 cariche puntiformi. Vogliamo calcolare il lavoro compiuto contro le forze del camp per portare  $q_2$  dall'infinito alla posizione  $q_2$ , successivamente, per portare  $q_3$  dall'infinito nella posizione  $q_3$ . Nel I° caso otteniamo:

$$-L_{\infty, P_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}$$

Nel II° caso bisogna tener conto del lavoro compiuto contro le forze del camp generato sia da  $q_1$  che da  $q_2$ :

$$-L_{\infty, P_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}} \Rightarrow$$



Pertanto, per un sistema di cariche puntiformi l'energia elettrostatica è: 36

$$U \equiv -L_{\infty, p1} - L_{\infty, p2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_1 p_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_1 p_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_2 p_3}{r_{23}}$$

Questo risultato può essere generalizzato ad  $N$  cariche puntiformi:

$$U = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_i \cdot p_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_i \cdot p_j}{r_{ij}}$$

• Esprimere dell'energia elettrostatica in funzione del potenziale elettrostatico:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_i \cdot p_j}{r_{ij}} \longrightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i \cdot \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_j}{r_{ij}} \right) \xrightarrow{V_i}$$

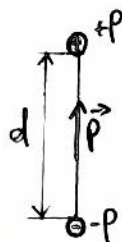
$V_i \rightarrow$  potenziale elettrostatico generato da tutte le cariche puntiformi, eccetto le  $i$ -esime, nel punto dove è presente la carica  $i$ -esima. Per cui:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i \cdot V_i$$

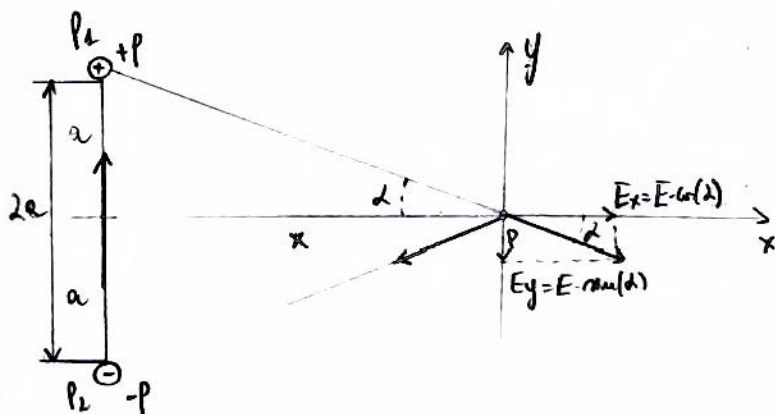
- Si definisce dipolo elettrico un sistema di due cariche puntiformi, aventi lo stesso valore, ma di segno contrario, poste rispettivamente a distanza  $d$ .

- Su un dipolo elettrico è possibile definire un momento di dipolo come il vettore  $\vec{p}$  avente:

- modulo pari a  $q \cdot d \Rightarrow |\vec{p}| = q \cdot d$  (C.m)
- direzione delle congiungenti tra le due cariche
- verso dalle cariche negative e quelle positive



- Calcolo del campo elettrostatico di un dipolo elementare nei punti del suo asse:



- Per la sovrapposizione degli effetti, il campo elettrostatico nel p.to P è la somma dei campi elettrostatici dovuti alle cariche positive ( $\vec{E}^{(+)}$ ) e alle cariche negative ( $\vec{E}^{(-)}$ ):

$$\vec{E}_P = \vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)} \quad \text{L'operazione vettoriale si realizza nelle sue componenti cartesiane:}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{Px} = \vec{E}_x^{(+)} + \vec{E}_x^{(-)} = 0 \quad (\text{per simmetria}) \\ \vec{E}_{Py} = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} \end{cases}$$

Perché il campo elettrostatico generato dal dipolo elettrico nel p.to P è tutto diretto lungo l'asse delle y:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} = \vec{E}_y \cdot \hat{y}$$

$$|\vec{E}_{Py}| = |\vec{E}_y^{(+)}| + |\vec{E}_y^{(-)}|, |\vec{E}_y^{(+)}| = |\vec{E}_y^{(-)}| = |\vec{E}^{(+)}| \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow P_1P = P_2P = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\vec{E}_y^{(+)} = \vec{E}_y^{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{x^2 + a^2} \cdot \sin(\alpha) \quad \left| \begin{array}{l} a = \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{array} \right. \Rightarrow E_y^{(+)} = E_y^{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{x^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{y}$$

$$|\vec{E}_{Py}| = 2 \cdot |\vec{E}_y^{(+)}| \sin(\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot p \cdot a}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

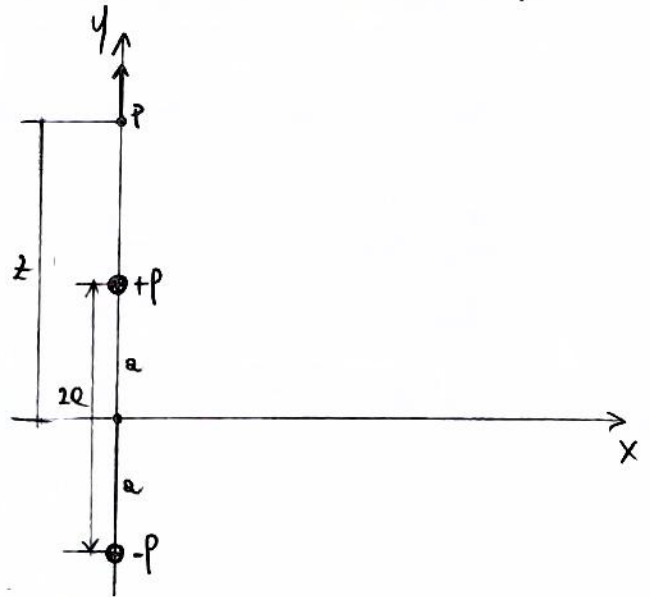
questo risultato può essere espresso in termini del momento di dipolo  $\vec{p}$ :

$$|\vec{E}_{Py}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \vec{p} = 2 \cdot p \cdot \hat{y} \quad \left| \begin{array}{l} \text{per } x \gg 2a \text{ (e grande distanza dal dipolo elettrico):} \\ \vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{x^3} \end{array} \right.$$

- Calcolo del campo elettrostatico di un dipolo elementare nei punti della retta delle due cariche, esternamente ad esse:

38

$$\vec{E} = \vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)} \quad \begin{cases} \vec{E}_x = \vec{E}_x^{(+)} + \vec{E}_x^{(-)} = 0 \\ \vec{E}_y = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} \end{cases}$$



$$\vec{E}_y^{(+)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{(z-a)^2} \hat{y} \quad \vec{E}_y^{(-)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{(z+a)^2} \hat{y}$$

$$\vec{E}_y = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{|q|}{(z-a)^2} - \frac{|q|}{(z+a)^2} \right] \hat{y}$$

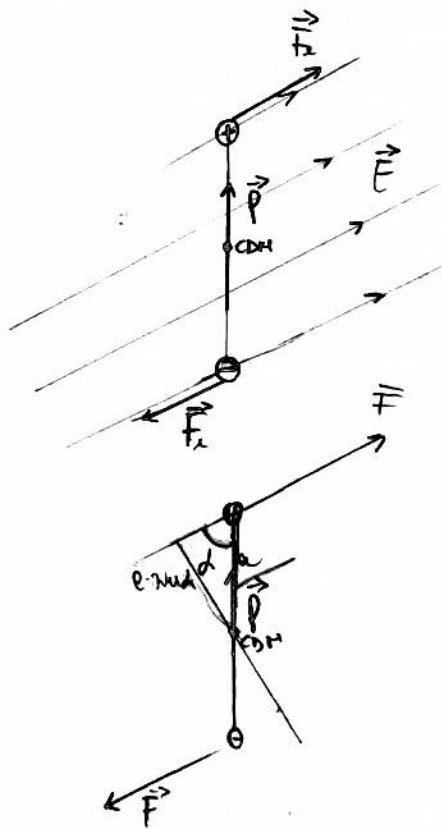
$$\Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{(z+a)^2 - (z-a)^2}{(z-a)^2(z+a)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(z^2+2az+a^2 - z^2+2az-a^2)}{(z-a)^2(z+a)^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4az}{(z^2-a^2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{(z^2-a^2)^2}$$

per  $z \gg a$ :

$$\vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{z^3}$$

- Comportamento di un dipolo elettrico quando questo è immerso in un campo elettrico: momento delle forze relativo ad un dipolo:

Immergiamo un dipolo in un campo elettrico uniforme:



Sulle cariche del dipolo agisce una forza elettrica  $\vec{F}$  (dovuta alla presenza del campo elettrico).  $\vec{F}$  ed, in modulo,  $\vec{E} \cdot q$ . Tali forze hanno lo stesso modulo, ma direzione opposta. Due forze centrali con punti caratteristici non definiti come coppia di forze. Possiamo calcolare su una coppia di forze il momento meccanico  $\tau$ , rispetto a qualsiasi punto. Calcolo  $\tau$  rispetto al COM.

$d \rightarrow$  coppia che  $\vec{p}$  forma con la direzione del campo elettrico  
e  $a \sin d \rightarrow$  braccio delle forze (incertito è il polo del 1° Teorema p. 18)

$$\tau = \vec{F} \cdot a \cdot \sin(d)$$

Applicando lo stesso dx, entrambi i momenti sono entrambi al polo del 1° Teorema, e quindi sono uguali:

$$\tau = 2 \cdot q \cdot a \sin(d) \vec{F} = 2 \cdot q \cdot a \sin(d) \cdot p \cdot \vec{E} = \boxed{2 \cdot q \cdot p \vec{E} \sin(d)}$$



$\gamma = \vec{p} \cdot \vec{E} \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \boxed{\gamma = p \wedge E}$  tale relazione vale anche se il campo non è uniforme. 39

Il doppio moltiplicando  $\vec{p}$  non è parallelo alla direzione del campo elettrico, dopo averlo traslato.

- Un condensatore è un sistema di due conduttori tra i quali esiste un'induzione elettrostatica completa. Per tali sistemi, il valore assunto dalla carica  $Q$  dell'uno o dell'altro armatura è proporzionale alla differenza di potenziale  $\Delta V$  tra le armature stesse: il rapporto tra  $Q$  e  $\Delta V$  è costante.
- La costante di proporzionalità del condensatore proprio il rapporto tra  $Q$  e  $|\Delta V|$ :

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} \Rightarrow Q = C \cdot |\Delta V| \quad C = \frac{\text{Coulomb}}{\text{volt}} = F (\text{Farad}) \quad 1F = \frac{1C}{1V}$$

- La costante dipende dalle geometrie del condensatore e dall'eventuale dielettrico presente tra le armature.
- Energia elettrostatica di un condensatore
- $U = -L$  (energia potenziale = - lavoro per spostare la carica contro le forze del campo) per campi conservativi
- Calcoliamo il lavoro necessario per trasferire una carica  $+Q$  da un'armatura all'altra, partendo dalla situazione in cui il condensatore è scarico.

- $V = V(t) \rightarrow$  diff. di potenziale tra le armature  $Q = Q(t) \rightarrow$  carica sulle armature per un dato  $t \rightarrow V = V \quad Q = +P/-P$

- $dL = dP \cdot V \Big|_{C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C}} \Rightarrow dL = dP \cdot \frac{Q}{C}$  (lavoro per spostare una carica elementare  $dq$  da un'armatura all'altra)

- $L = \int_0^Q dL = \frac{1}{C} \cdot \int_0^Q q \cdot dP = \frac{1}{C} \cdot \left[ \frac{P^2}{2} \right]_0^Q = \frac{1}{2C} \cdot Q^2$  (lavoro per spostare l'intera carica  $Q$ )

- $|U| = |L| \Rightarrow U = \frac{1}{2C} \cdot Q^2 \Big|_{C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow Q = C \cdot \Delta V} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \Delta V \cdot Q = \boxed{\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \Delta V}$

- $U = \frac{1}{2C} \cdot Q^2 \Big|_{C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow Q = C \cdot \Delta V} \Rightarrow U = \frac{(C \cdot \Delta V)^2}{2C} = \frac{C \cdot \Delta V^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot C \cdot \Delta V^2}$

- ANALISI DI ALCUNE TIPOLOGIE DI CONDENSATORI COMUNEMENTE DIFFUSE

- Veniamo di seguito a ripercorrere le analisi di alcune particolari tipologie di condensatori comuni. Per ognuno di essi, intendiamo il calcolo di alcune grandezze fondamentali:

- Differenza di potenziale tra le armature:  $\Delta V$  verrà calcolata come:  $\Delta V = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ,  $L$  percorso chiuso che unisce le armature

- Costante:  $C = \frac{Q}{|\Delta V|}$

- Energia elettrostatica: questa verrà calcolata come l'intero lavoro delle densità di carica per  $U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_V E^2 dV$

## ① Condensatore piano:

Un condensatore piano è costituito da due armature piane parallele di area  $A$ , porte e distanze  $d$ . Piano  $+Q$  e  $-Q$  le cariche sulle armature:

• calcolo delle differenze di potenziale:

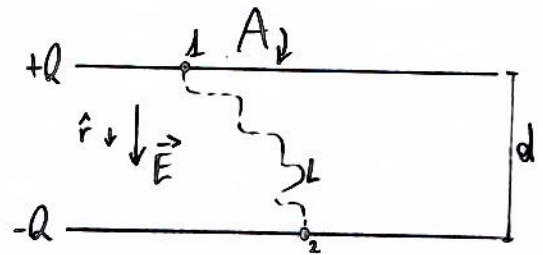
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{r} \quad \sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot \hat{r}$$

$$|\Delta V| = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot d$$

• calcolo della capacità:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot d} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$$

da notare che questo è un caso ideale, nel quale non sono assolutamente trascurati gli effetti di bordo. Lo può essere esatto anche in casi reali se si considerano armature piane ideali:  $\sqrt{A} \gg d$



• calcolo dell'energia elettrostatica:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} E^2 d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} \frac{Q^2}{\epsilon_0^2} d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0^2 L^2} \cdot \int_{\text{spazio}} d\tau \quad \left| \int_{\text{spazio}} d\tau \text{ è il volume tra le 2 armature, per } A \cdot d \right|$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0^2 L^2} \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 A^2} \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 \frac{A}{d}} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \left( \frac{Q^2}{2C} \right)$$

## ② Condensatore sferico:

Le armature sono costituite da due superfici sferiche concentriche di raggi  $R_1$  ed  $R_2$ . Piano  $+Q$  e  $-Q$  le cariche.

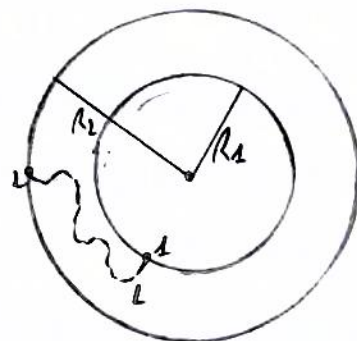
Il campo elettrico è radiale e vale:

$$E = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & r > R_2 \end{cases}$$

(per ottenere il valore del campo basta applicare il th. di Gauss e) superfici sferiche concentriche di raggio  $r$ , per qualsiasi

• calcolo delle differenze di potenziale:

$$|\Delta V| = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( -\frac{1}{r} \right)_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( -\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$





• Calcolo delle capacità:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

NOTA: se  $R_2 = R_1 + d$ , con  $d \ll R_1$  (armature molto vicine tra di loro) la capacità sarà:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1(R_1 + d)}{d} \approx \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot R_1^2}{d} \approx \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad (\text{capacità del condensatore piano})$$

• Calcolo dell'energia elettrostatica:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} E^2 d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \right)^2 d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left( -\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left[ \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right] =$$

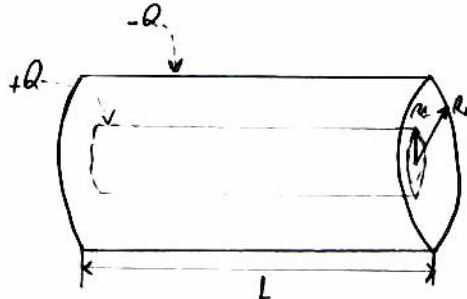
$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right), \text{ che può essere riscritta in funzione delle capacità: } U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} = \frac{Q^2}{2 \left( 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)} =$$

$$= \frac{Q^2}{2C}$$

• Condensatore cilindrico:

Le armature sono due infusori cilindrici coassiali di lunghezza  $L$ , aventi raggi  $R_1$  ed  $R_2$ . Sono +Q e -Q le cariche sulle armature e  $\lambda = Q/L$  le densità lineari di carica. Nell'ipotesi di trascurare gli effetti di bordo, nelle zone comprese tra i due conduttori cilindrici il campo elettrico (radiale) si comporta come se la carica  $Q$  fosse distribuita uniformemente conduttore lineare a lungo l'asse del sistema:

$$E = \begin{cases} \phi, & \phi \leq r < R_1 \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r}, & R_1 < r < R_2 \\ \phi, & r > R_2 \end{cases}$$



• Calcolo della differenza di potenziale:

$$|\Delta V| = \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \ln \left| \frac{R_1}{R_2} \right|$$

• Calcolo delle capacità:  $C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \left| \frac{R_2}{R_1} \right|}$

• Calcolo dell'energia elettrostatica:

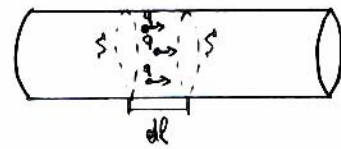
43

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{spazio}} E^2 d\tau \rightarrow \text{funzione cilindrica} \rightarrow d\tau = 2\pi r L dr \rightarrow E^2 d\tau = \left( \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r} \right)^2 2\pi r L dr = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r L dr$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0^2 L} \cdot \frac{1}{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L} \ln \left| \frac{R_2}{R_1} \right|$$

Consideriamo un filo conduttore, di sezione  $S$ , attraversato da cariche in moto. Si definisce intensità di corrente ( $I$ ) la carica  $Q$  che attraversa la sezione  $S$  del conduttore in un tempo  $dt$ :  $I = \frac{dQ}{dt}$ .

$I [A]$  (ampere): Un Coulomb è la carica che, attraversando la sezione di un conduttore in un secondo, genera la corrente di 1 Ampere (1A)



• Definito della velocità delle cariche in una corrente  $I$ :

—  $q \rightarrow$  valore di ogni carica  $v \rightarrow$  velocità (in modulo) delle cariche  $dl \rightarrow$  carica che attraversa la sezione  $S$  nel tempo  $dt$   
 $m \rightarrow$  numero di cariche nel conduttore per unità di volume  $n = \frac{mq}{Sdl}$

$$dQ = \underbrace{m \cdot S \cdot dl}_{mq} \cdot \underbrace{|v|}_{v dt} = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \cdot dt \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \Rightarrow I = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \Rightarrow v = \frac{I}{m \cdot S \cdot |q|}$$

— i.e.: il verso positivo delle correnti è quello delle velocità delle cariche positive. In un conduttore sono le cariche negative a muoversi, quindi il verso delle correnti è contrario al moto delle cariche.

• Intensità di corrente:

L'intensità di corrente  $I$  è uno scalare, ma può essere descritta da un campo vettoriale  $\vec{J}(r, t)$ , detto densità di corrente tale che il flusso

— il campo  $\vec{J}$  attraverso una superficie  $S$  fornisce proprio la corrente  $I$ :  $I(t) = \int_S \vec{J}(r, t) \cdot d\vec{S}$   $\vec{J} \equiv A/m^2$

• Equazione di continuità:

Consideriamo una carica  $Q$  distribuita con densità volumica  $\rho$  in un volume  $\tau$ , delimitato da una superficie chiusa  $S$ :

$$Q = \int_{\tau} \rho d\tau$$

— in un insieme di cariche racchiuso in questo volume, vogliamo dimostrare il principio di conservazione delle cariche: se una parte delle cariche attraversa la superficie  $S$  (uscendo dal volume), c'è una variazione di cariche all'interno del volume  $\tau$  che è proprio uguale alle cariche uscenti da  $S$ . Supponiamo che nel tempo  $dt$  le cariche  $Q$  subiscano, all'interno di  $S$ , una variazione  $dQ = -d \left( \int_{\tau} \rho d\tau \right)$ , le cariche uscenti (la variazione è negativa) dalla superficie  $S$  vale:

$$dQ_{\text{usc}} = I \cdot dt = dt \cdot \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{applicando il t.h. delle divergenze vale: } \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau} \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{facendo: } -d \left( \int_{\tau} \rho d\tau \right) = dt \cdot \int_{\tau} \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow -\frac{d}{dt} \left( \int_{\tau} \rho d\tau \right) = \int_{\tau} \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  è possibile portare la derivata sotto il segno di integrale dato che la superficie è costante e quindi la sua misura non dipende dal tempo:

$$\int_{\tau} -\frac{d}{dt} \rho d\tau = \int_{\tau} \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow \text{div} \vec{J} \cdot d\tau + \frac{d}{dt} \rho d\tau = 0, \text{ detta equazione di continuità}$$



• Leggi di Ohm:

$$\Delta V = R \cdot I$$



45

$\Delta V = V_2 - V_1$   $R \rightarrow$  resistenza del tratto di filo conduttore, espressa in  $\Omega$  (Ohm)

II<sup>e</sup>: La resistenza di un conduttore filiforme di lunghezza  $L$  e sezione  $S$  vale:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} \quad \left| \begin{array}{l} \rho \rightarrow \text{resistenza specifica o resistività del materiale conduttore} \left( \frac{\Omega \cdot \text{m}^2}{\text{m}} = \Omega \cdot \text{m} \right) \\ S \rightarrow \text{sezione del conduttore} \quad L \rightarrow \text{lunghezza del conduttore} \end{array} \right.$$

• Effetto Joule:

Il passaggio di corrente attraverso una resistenza  $R$  provoca una dissipazione d'energia. La potenza dissipata vale:

$$P = \Delta V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$$

## Introduzione al campo magnetico

- In un punto P dello spazio è presente un campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  se, in una carica puntiforme P, che tramite in P con velocità  $\vec{v}$ , agisce una forza  $\vec{F}$  del tipo:  $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$ , chiamata forza di Lorentz. Tale forza è perpendicolare alla velocità  $\vec{v}$ , per cui non ne altera il modulo, ma solo la direzione: per tale motivo la forza di Lorentz è detta di tipo deflettente. Le dimensioni fisiche di  $\vec{B}$  sono:

$$[B] = \frac{[F]}{[q] \cdot [v]} = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T \text{ (tesla)}, \text{ oppure } W/m^2 \text{ (wheat/m}^2\text{)} \quad 1T = 1 \frac{W}{m^2} \quad 1G(10^9 m) = 10^{-4} T$$

- Essendo la forza di Lorentz perpendicolare alla velocità, essa non compie lavoro sulla carica:

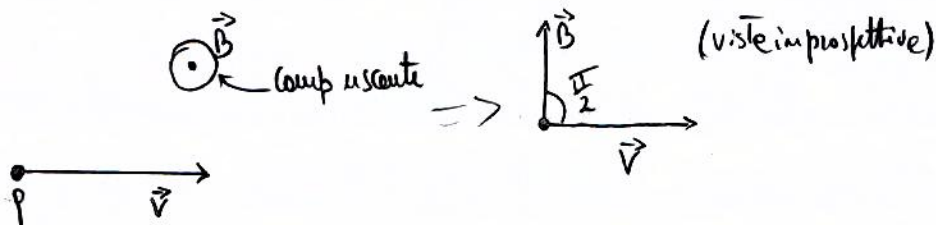
$$L = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = q \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}, \text{ per le espressioni del prodotto misto tra tre vettori: } (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1)$$

$$\text{vale: } q \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = d\vec{l} \wedge q \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \vec{B} \text{ (dato fuori le parentesi scalare P)} = q \cdot d\vec{l} \wedge \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \vec{B}, \text{ ma } d\vec{l} \wedge d\vec{l} = 0 \text{ (non paralleli)}$$

$$\text{per cui: } L = 0 \text{ c.v.d.}$$

## Azione del campo magnetico su una carica q in moto rettilineo:

- Supponiamo di avere una carica q in moto in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme, uscente dal piano del foglio. La velocità di  $P$  è  $\vec{v}$ , tale che essa fornisca la direzione del campo un campo di Po (B e  $\vec{v}$  sono perpendicolari):



- Le forze di Lorentz che agisce sulle cariche q è diretta perpendicolarmente al piano individuato da  $\vec{B}$  e  $\vec{v}$  (con direzione definita dalle regole della mano destra). Essendo l'angolo tra  $\vec{B}$  e  $\vec{v}$  di  $90^\circ$ :

$$|\vec{F}| = q \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(90^\circ) = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(90^\circ) = q \cdot v \cdot B, \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow m \cdot \vec{a} = q \cdot v \cdot B \Rightarrow a = \frac{q \cdot v \cdot B}{m} \text{ (costante rispetto al tempo)}$$

- vedendo l'espressione delle cariche centripete, vedremo che le cariche immerse nel campo si muovono di moto circolare uniforme con:

$$\bullet \text{ accelerazione centripeta } a_c = \frac{q \cdot v \cdot B}{m}$$

$$\bullet \text{ velocità angolare: } \omega = \frac{v}{R}, \quad v = \omega \cdot R$$

- l'accelerazione centripeta può anche essere espressa come  $a_c = \frac{v^2}{R}$ , ed equando:

$$a = \frac{q \cdot v \cdot B}{m} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \frac{q \cdot B}{m} = \frac{v}{R} \Rightarrow \left[ R = \frac{v \cdot m}{q \cdot B} \right], \text{ per cui: } v = \omega \cdot R \Rightarrow v = \omega \cdot \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \Rightarrow \omega = \frac{q \cdot B}{m} \quad 46$$



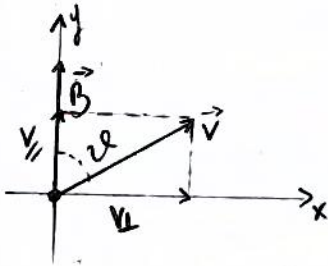
$$\cdot T(\text{periodo}) = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}$$

47

• In definitiva possiamo dire che una carica q si muove in un campo magnetico  $\vec{B}$  con velocità perpendicolare a  $\vec{B}$  si muove con una Traiettoria circolare lungo il verso perpendicolare a quello individuato da  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ , più precisamente di moto circolare uniforme, con:

$$r_c = \frac{p \cdot v \cdot B}{m} (\text{circonferenza centrifuga}) \quad R = \frac{V \cdot m}{q \cdot B} (\text{raggio}) \quad \omega = \frac{q \cdot B}{m} (\text{velocità angolare}) \quad T = \frac{2\pi m}{q \cdot B} (\text{periodo})$$

• Supponiamo ora che la carica q si muove in un campo magnetico con una velocità  $\vec{v}$  che forma l'angolo  $\alpha$  con la direzione del campo magnetico  $\vec{B}$ :



nella carica q agisce la forza di Lorentz  $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

possiamo scomporre  $\vec{v}$  nelle sue componenti: interviene:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad \left| \begin{array}{l} v_{\parallel} \rightarrow \text{componente parallela al campo magnetico } \vec{B} \\ v_{\perp} \rightarrow \text{componente perpendicolare al campo magnetico } \vec{B} \end{array} \right.$$

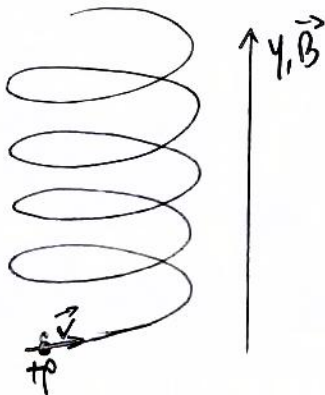
Il problema può quindi essere scomposto in due parti:

① Contributo dovuto alla componente  $v_{\perp}$ ,  $v_{\perp} = |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) = v_x$ . La particella ruota nel piano ortogonale a  $\vec{B}$  e  $\vec{v}_{\perp}$ .

$$R = \frac{m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B} = \frac{m \cdot v \cdot \sin \alpha}{q \cdot B} \quad (\text{si fa punto d'arrivo in precedente})$$

② Contributo dovuto alla componente  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\parallel} = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) = v_y$ . Essendo  $v_{\parallel}$  in direzione parallela al campo, la  $\vec{F}$  di Lorentz è nulla lungo la direzione di  $\vec{B}$  (in modulo). In conseguenza, una particella muoversi con velocità  $v$  parallela al campo magnetico  $\vec{B}$ , parte in moto rettilineo uniforme, con velocità  $\vec{v}$ , costante.

• la combinazione dei moti lungo le due direzioni (contributo di  $v_{\perp}$  che fa ruotare e di  $v_{\parallel}$  che lo fa traslare) fa muovere la carica con una Traiettoria elicoidale:



$$P = v_{\parallel} \cdot T, T = \frac{2\pi m}{q \cdot B} \quad (\text{periodo dell'elica})$$

N.B.: Come già detto, il lavoro compiuto dalla forza di Lorentz per spostare una carica per una posizione  $P$  ed una posizione  $Q$  è sempre nullo:  $L_{LQ} = 0$ . Per il th. dell'energia cinetica si ha:  $L_{LQ} = E_Q - E_P$ , dunque che l'energia cinetica della massa puntiforme m che trasporta la carica q rimane costante. Pertanto, il campo di ind. magnetico  $\vec{B}$  non modifica il modulo della velocità della carica, ma ne serve la direzione. Salvo che il campo  $\vec{B}$  non agisca la carica che non ha massa, soltanto.



1<sup>ª</sup> FORMULA DI LAPLACE

Consideriamo una corrente stazionaria  $I$  che fluisce in un filo conduttore di lunghezza  $L$ . Se  $d\vec{\ell}$  un elemento di filo orientato come la corrente. Un elemento di corrente  $I d\vec{\ell}$  produce nel punto  $P$  un campo magnetico elementare  $d\vec{B}$  dato dalla relazione:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

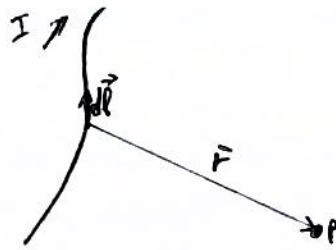
$\mu_0 \rightarrow$  permeabilità magnetica del vuoto,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Wb}{Am}$$

la relazione è detta 1<sup>ª</sup> formula di Laplace.

Integrando  $d\vec{B}$  su tutto il filo si ottiene l'espressione del campo magnetico  $\vec{B}$  in  $P$  dovuto alla corrente che circola in tutto il filo.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}, \text{ dove sotto il segno di } \int \text{ formula di Laplace in forma integrale}$$



APPLICAZIONI DELLA 1<sup>ª</sup> FORMULA DI LAPLACE:

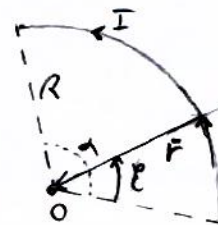
Campo di induzione magnetica prodotto da un filo e forme di arco di circonferenza, percorsi da corrente, nel suo centro:

Consideriamo un tratto di filo e forme di arco di circonferenza di raggio  $R$ , con centro  $O$ , percorsi da una corrente  $I$ . Calcoliamo il campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  nel centro  $O$ .

$$d\vec{\ell} = \vec{r} d\ell \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \left| \begin{array}{l} d\vec{\ell} \perp \vec{r} \\ |\vec{r}| = R \\ d\vec{\ell} = \vec{r} d\ell \end{array} \right. \Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R d\ell \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{R^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{R} \quad (\text{camp. elementare in } O)$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int d\ell \Rightarrow |\vec{B}| = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \alpha} \quad (\text{camp. totale in } O)$$

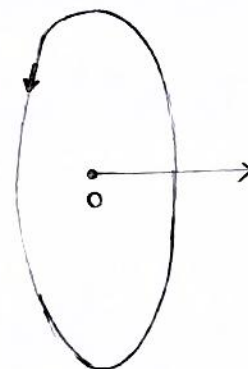


Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, percorsi da corrente, nel suo centro:

Possiamo calcolare il campo elementare  $d\vec{B}$  calcolato in precedenza:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{R}, \text{ questa volta integriamo su tutte le circonferenze, arco di } \phi \text{ e } 2\pi:$$

$$|\vec{B}| = \int d\vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \frac{1}{R} \cdot 2\pi R \Rightarrow \boxed{\frac{\mu_0 I}{2R}}$$

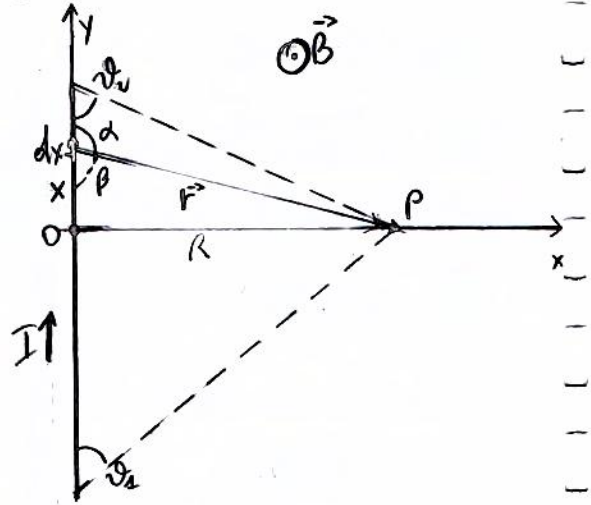


- Campo di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo finito, pieno di corrente: 4P

$d \rightarrow$  elemento  $\vec{r}$  ed  $\vec{x}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{x} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \cdot r \cdot \sin(\alpha)}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin(\alpha)}{r^2}$$

con direzione  $\perp$  al piano individuato da  $d\vec{x}$  ed  $\vec{r}$  verso entante nel senso del filo. Per ottenere il campo magnetico  $\vec{B}$  totale in P devo integrare  $d\vec{B}$  su tutto il filo.



$\vec{B} = \int_{\text{filo}} d\vec{B} \rightarrow$  effettuo un cambio di variabile, restando come variabile d'integrazione l'angolo  $\beta$  scelto come complementare di  $\alpha$  ed esprimo tutte le variabili in funzione di  $\beta$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin(\alpha)}{r^2} \quad \begin{cases} \alpha = \pi - \beta \\ R = r \sin \beta \Rightarrow r = \frac{R}{\sin \beta} \\ x = R \cot \beta \\ dx = R \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \beta}\right) d\beta = -\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta \end{cases} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-\frac{R}{\sin^2 \beta} \cdot d\beta \cdot \sin(\pi - \beta)}{\left(\frac{R}{\sin \beta}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta \sin(\pi - \beta)}{\frac{R^2}{\sin^2 \beta}} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\pi - \beta)}{R} d\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\beta)}{R} d\beta$$

$$|\vec{B}_{\text{tot}}| = \int_{\pi - \vartheta_2}^{\vartheta_1} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\beta)}{R} d\beta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\cos(\beta)]_{\pi - \vartheta_2}^{\vartheta_1} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\vartheta_1) - \cos(\pi - \vartheta_2)) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\vartheta_1) + \cos(\vartheta_2))$$

Se il pto P è nel tratto del filo  $\rightarrow$   $B = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\vartheta_1) + \cos(\vartheta_2)) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \infty$  Il campo diverge in P.

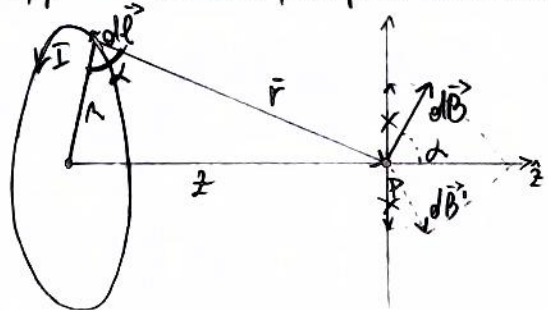
Se il pto P è sulle rette del tratto di filo, i vettori  $d\vec{B}$  ed  $\vec{r}$  sono antiparalleli, quindi  $d\vec{B} \wedge \vec{r} = 0$  e vale su ogni  $d\vec{B}$  nel tratto di filo, per cui:  $d\vec{B} = 0, \forall d\vec{B} \in L$

Il campo è nullo in P.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\vartheta_1) + \cos(\vartheta_2)) \quad \begin{matrix} \vartheta_1 = \pi \\ \vartheta_2 = 0 \end{matrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\pi) + \cos(0)) = 0$$

- Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, piena di corrente, nei punti del suo asse:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad |\vec{r}| \perp d\vec{l} \Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot r}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$



Le componenti lungo le verticali si elidono fra le simmetrie

del problema. Resta solo la componente lungo z.  $dB_z = |dB| \cdot \cos(\alpha) \quad R = r \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{R}{r} \Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cdot \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} dl$

$$B_z = \int_{\text{spira}} dB_z = \int_{\text{spira}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \int_{\text{spira}} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3} \Rightarrow$$



$$r = \sqrt{R^2 + z^2} = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |\vec{B}_z| = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

50

- Camp di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo indefinito, preso da cune: legge di Biot-Savart.
- Possiamo considerare il filo indefinito come un caso particolare di un filo di lunghezza  $L$ , con  $L \rightarrow +\infty$ . Partiti con la fine a  $z=0$ , il camp  $B$  in un punto  $P$  vale:  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(0) + \cos(\pi)) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ , con direzione  $\perp$  e quella del piano formato dal filo e dal  $\vec{r}$  verso definito dalle regole della mano destra. Tale relazione prende il nome di legge di Biot-Savart.

• NOTAZIONI SU CAMPI CENTRALI ED ALCUNI:

- Ogni camp centrale è conservativo, quindi è irrotazionale. Esempio: camp elettrostatico.

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{e} = \phi \quad \text{rot}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

- Ogni camp elicoidale è solenoidale. Esempio: camp magnetico

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

• II<sup>a</sup> FORMULA DI LAPLACE

- Per le forze di Lorentz vale:  $d\vec{F} = d\vec{p} \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \mid \vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} \mid \vec{I} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{I} dt \Rightarrow d\vec{F} = \vec{I} d\vec{p} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = \vec{I} \cdot d\vec{p} \wedge \vec{B}$
- $d\vec{F} = \vec{I} \cdot d\vec{p} \wedge \vec{B}$  è definita II<sup>a</sup> formula di Laplace in forme differenziali
- $\vec{F} = \vec{I} \int_L d\vec{p} \wedge \vec{B}$  è definita II<sup>a</sup> formula di Laplace in forme integrali
- $\vec{F}$  è la forza che agisce su un elemento di filo  $d\vec{e}$  orientato come la cune che lo attraversa

NOTA BENE:

- La I<sup>a</sup> F.D.L. permette di calcolare il camp magnetico  $\vec{B}$  (in forme differenziali) o il camp  $B$  (in forme integrali) esplicito in un f.to l'interno ed in un conduttore fili forme attraversato da cune. Il camp  $B$  è dato dal prodotto di cune nel conduttore
- La II<sup>a</sup> F.D.L. permette di calcolare la forza che agisce su un elemento di filo (in forme differenziali) o sul filo (in forme integrali) attraversato da cune ed immerso in un camp magnetico



• Momento di dipolo esercito da una spira piana di corrente

Si definisce momento di dipolo di una spira piana attraversata da una corrente  $I$  il vettore:  $\vec{\mu} = I \cdot \vec{S}$ , dove  $\vec{S}$  è il vettore esercito alla superficie  $S$  della spira, diretto perpendicolarmente alla spira, con verso dato dal p.l. delle mani destre facendo ruotare richiudendo il verso delle correnti.

• Momento meccanico agente su una spira rettangolare piana di corrente ed immersa in un campo magnetico uniforme:

Per le II<sup>e</sup> formule di Laplace:

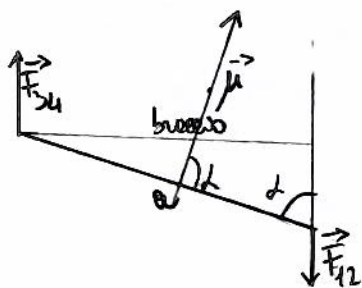
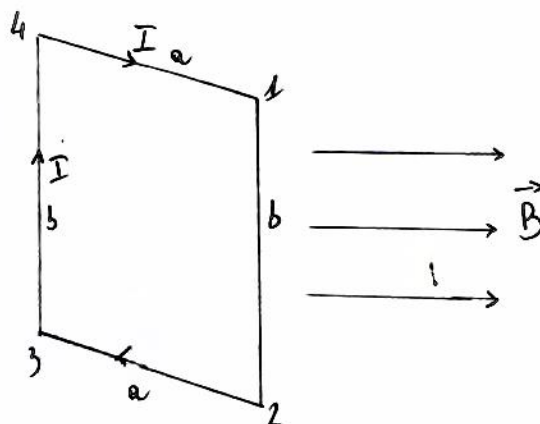
$$\vec{F}_{23} = I (\vec{z3}) \wedge \vec{B}; \quad \vec{F}_{41} = I (\vec{14}) \wedge \vec{B}$$

• Ne hanno la direzione dell'asse di rotazione, lo stesso modulo e versi contrari: costituiscono una coppia di forze e braccio nullo, quindi non sviluppano alcuna rotazione della spira

• sui lati  $12$  e  $34$  (di lunghezza  $b$ ) agiscono le forze:

$$\vec{F}_{12} = I (\vec{12}) \wedge \vec{B}; \quad \vec{F}_{34} = I (\vec{34}) \wedge \vec{B}$$

• Ne hanno lo stesso modulo  $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{34}| = I \cdot b \cdot B$  (il campo è  $\perp$  al lato  $b$ , perciò il  $\sin(\alpha) = \sin(90^\circ) = 1$ ), verso opposti e un braccio (non nullo strettamente). • costituiscono una coppia di forze di braccio  $e \cdot \sin(\alpha)$ .



$$\text{braccio} = a \cdot \sin(\alpha)$$

$$\gamma = F_{12} \cdot \text{braccio} = I \cdot e \cdot b \cdot B \cdot \sin(\alpha) \quad \left| \begin{array}{l} F_{12} = I \cdot b \cdot B \\ \text{braccio} = e \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right.$$

$\gamma$  può essere espresso come:

$$\gamma = \vec{\mu} \wedge \vec{B}, \text{ in modulo: } |\gamma| = I \cdot e \cdot b \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\gamma| = |\vec{\mu} \wedge \vec{B}| = \boxed{I \cdot e \cdot b} \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

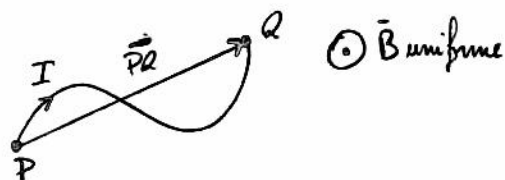
$\vec{\mu} = I \cdot \vec{S}$   $\downarrow$   $\vec{S}$  è anche l'angolo compreso tra  $\vec{\mu}$  e  $\vec{B}$

La direzione di  $\vec{\mu}$  è perpendicolare alla superficie, proprio come in fig., perciò le 2 espressioni sono equivalenti.

Forse agente su un tratto di filo, preso da corrente, ed immerso in un campo magnetico uniforme:

Consideriamo un tratto di conduttore ripido, di estremi P e Q, attraversato da corrente I, nel verso che va da P a Q. Il campo  $\vec{B}$  in cui è immerso è uniforme. Per la II<sup>a</sup> formula di Laplace la forza agente sul filo è:

$$\vec{F} = I \int_{\text{filo}} d\vec{l} \wedge \vec{B} \rightarrow \vec{F} = I \cdot \left( \int_{\text{filo}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B}$$



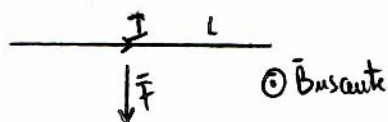
dove si è fatto mettere in evidenza e dentro il campo  $\vec{B}$ , essendo uniforme. L'integrale non è nient'altro che il vettore orientato da P a Q, perciò:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{PQ} \wedge \vec{B}$$

Quindi, la forza che agisce su un conduttore ripido non dipende né dalla forma, né dalle sue dimensioni, né dal vettore che unisce i suoi estremi, orientato come il verso delle correnti. In particolare se il filo è rettilineo, vale:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}$$

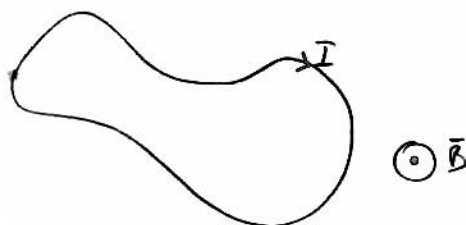
Consideriamo il particolare caso in cui il tratto di filo rettilineo è ortogonale al campo  $\vec{B}$  uniforme:



Forse agente su un filo chiuso, preso da corrente ed immerso in un campo magnetico uniforme.

Supponiamo di avere un filo conduttore chiuso, e preso da corrente I, attraversato da una corrente costante I. Per quanto detto prima, la forza agente sul filo vale:

$$\vec{F} = I \int_{\text{filo}} d\vec{l} \wedge \vec{B} = I \cdot \left( \int_{\text{filo}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = 0$$



L'integrale è nullo (intendiamo vettoriale) su una linea chiusa.

conclude che la risultante delle forze esterne agenti sulle spire è nulla. Ne consegue che il cor. non subisce alcuna accelerazione: ciò può non escludere la possibilità di avere un momento torcente.

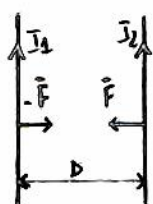
Interazione tra due fili paralleli e indefiniti, presi da corrente

Calcolando i campi ed induzioni magnetiche generati dai due fili l'uno nell'altro ed applicando la II<sup>a</sup> formula di Laplace si dedurrà la forza per unità di lunghezza agente sui due fili.

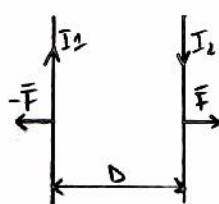
In definitiva questi due fili con le correnti hanno lo stesso verso e si respingono se le correnti hanno versi contrari.

Il modulo delle forze di interazione per unità di lunghezza vale:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi D}$$



Attrazione



Repulsione



• **Prova matematica:** calcoliamo di un campo vettoriale lungo una linea:

Consideriamo un campo vettoriale  $\vec{A}$  ed una linea infinitesima  $d\vec{l}$  immersa in esso.

Appunto perché la lunghezza è infinitesima, l'elemento di linea può ritenersi rettilineo, con la sua direzione individuata dal vettore  $\hat{r}$  quindi:  $d\vec{l} = dl \cdot \hat{r}$ .

Definiamo ora l'elemento del campo vettoriale  $\vec{A}$  lungo una linea orientata  $d\vec{l}$  le punti  $\vec{A}$ :

$$dC = \vec{A} \cdot d\vec{l} = A \cdot dl \cdot \cos(\alpha), \text{ dove } \vec{A} \text{ è il valore assunto dal campo vettoriale nel punto in cui passa } d\vec{l} \text{ ed } \alpha \text{ è l'angolo formato da } \vec{A} \text{ e } d\vec{l}.$$

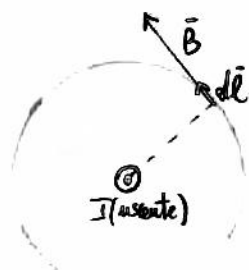
Sommando le circoscrizioni elementari lungo gli elementi di linee elementari otteniamo la circoscrizione in tutte le linee:

$$C_A(L) = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

• Calcoliamo di un campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  generato da una corrente  $I$  nel centro di una circonferenza di raggio  $R$ , con  $I$  perpendicolare al piano in cui si trova:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \quad (\text{legge di Biot-Savart}) \quad C_B(L) = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \oint_L dl = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I$$

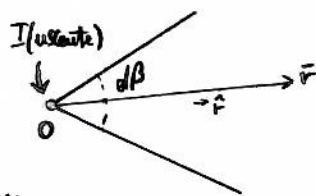
N.B.: il vettore campo magnetico è parallelo al vettore  $d\vec{l}$  (vedi campo di Biot-Savart), per cui  $\cos(\theta) = 1$ .



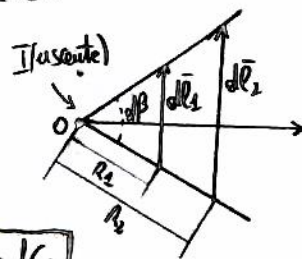
• **Teorema di Ampere in forme integrate**

Consideriamo una corrente rettilinea indefinita  $I$ , e nel punto  $O$  una ortogonale, e fissiamo nel punto  $O$ , disegnammo una semiretta  $r$  di direzione  $\hat{r}$  (si vede la figura). Intorno alla retta  $r$  consideriamo un cerchio per

$d\vec{B}$ , con centro in  $O$ . Studiamo ora come si comporta la circoscrizione elementare del campo  $\vec{B}$  generato dalla corrente  $I$  lungo le linee elementari  $dl_1$  e  $dl_2$  che sottendono l'angolo  $d\beta$ , analizzando 2 particolari situazioni caratterizzate da diversi orientamenti delle linee elementari:



I° caso:  $dl_1$  e  $dl_2$  perpendicolari alla semiretta  $r$ :  $|dl_1| = dl_1 \hat{e}$  e  $|dl_2| = dl_2 \hat{e}$



Il campo magnetico a distanza  $R_1$  vale, per la legge di Biot-Savart:  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \cdot \hat{e}$ , per cui:

$$dC_1 = \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = B_1 \cdot dl_1 \cdot \cos(\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \cdot dl_1 \cdot \cos(\theta) \quad |dl_1| = R_1 \cdot d\beta \Rightarrow dC_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \cdot R_1 \cdot d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\beta$$

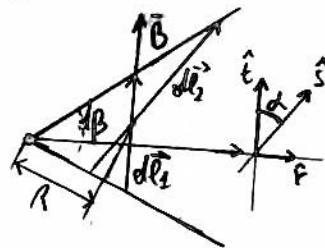
Tale risultato è indipendente dalla distanza  $R_1$ , quindi, applicando la stessa procedura,  $dC_1 = dC_2$

II° caso:  $dl_1$  e  $dl_2$  alla stessa distanza da  $O$ , con direzioni diverse:  $|dl_1| = dl_1 \hat{e}$  e  $|dl_2| = dl_2 \hat{e}$

$$\vec{B} = B \hat{e} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad dC_1 = \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = B \cdot dl_1 \cdot \cos(\theta) = B \cdot dl_1$$

$$dC_2 = \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = B \cdot dl_2 \cdot \cos(\alpha) \rightarrow (\hat{e} \cdot \hat{s}) = \cos(\alpha) \quad dl_1 = dl_2 \cdot \cos(\alpha) \quad (dl_1 \text{ è la proiezione di } dl_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dC_2 = B \cdot dl_1 = dC_1 \Rightarrow dC_1 = dC_2$$



Possiamo concludere da questi osservazioni che la circoscrizione del campo magnetico generato dalla corrente che passa in un conduttore rettilineo (idealmente infinito) lungo due linee infinitesime  $dl_1$  e  $dl_2$ , che sottendono un angolo centrato dove passa il  $\vec{B}$ , è uguale, se prendiamo i due elementi di linea a distanza  $R$  loro che alla stessa distanza, con orientamenti diversi.

Da tale conclusione, possiamo alle dimostrazioni vere e proprie del teorema.



• L'encircolazione del campo magnetico generato da una corrente  $I$  lungo una qualunque linea chiusa  $L$ : 54

- Anche in queste analisi, consideriamo due particolari casi:

- I° caso: la corrente  $I$  è concatenata con la linea  $L$ :  
 $I \rightarrow$  corrente rettilinea indefinita, perpendicolare al piano del loop ed uscente da esso, concatenata alla linea  $L$   
 $L \rightarrow$  linea circolare di raggio  $R$ , centrata nel punto  $O$  per cui passa  $I$ .
- $d\vec{B} \rightarrow$  campo generato da un elemento con vertice in  $O$

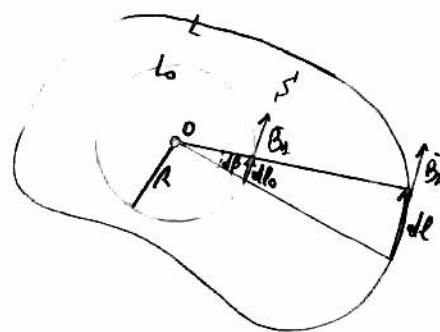
$$dC_B(d\vec{B}) = dC_B(d\vec{B}_O) \quad C_B(L) = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I$$

N.B.: la superficie  $S$  può essere vista come l'insieme di infiniti campi uscenti da  $O$ , per cui la concatenazione su  $L$  è uguale a quella su  $L_0$

$$\text{In definitiva: } C_B(L) = \mu_0 \cdot I_{\text{conc}}$$

- II° caso: la corrente  $I$  non è concatenata con la linea  $L$ :

- In questo caso le encircolazioni sono comunque uguali in modulo, ma il verso è opposto, in quanto  $d\vec{B}_1$  ed  $d\vec{B}_2$  hanno orientate in verso opposto
- Per cui:  $C_B(L) = 0$



Tali risultati possono essere estesi, per il principio di sovrapposizione degli effetti, a più correnti. In tal modo si può enunciarne il teorema di Ampère, di seguito enunciato:

• Teorema di Ampère:

- "L'encircolazione del campo magnetico lungo una linea chiusa orientata è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate con la linea multiplata per la prima volta nel tratto nel vuoto:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_i I_{\text{conc}i} \quad \text{dualmente, se la encircolazione (lungo una linea chiusa) è nulla, la somma algebrica delle correnti concatenate alla linea è nulla.}$$

• Teorema di Ampère in forma differenziale:

- Consideriamo una densità di corrente  $\vec{J}$ . Fissata una linea chiusa  $L$ , la corrente concatenata con la linea  $L$  è il flusso del campo  $\vec{J}$  attraverso una qualunque superficie che si affacci ad  $L$ :

$$\sum_i I_{\text{conc}i} = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, \text{ per il th. di Ampère: } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{\text{conc}i} \Rightarrow \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

- per il th. dell'encircolazione:

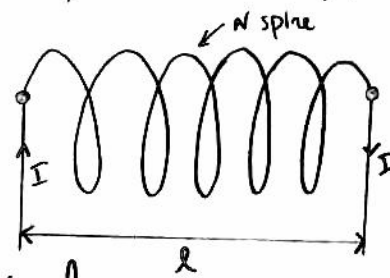
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

- definite una superficie  $S$  uguale per entrambi gli integrali, possiamo eguagliare i due integrali:

$$\text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \cdot \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}} \quad \left( \text{teorema di Ampère in forma differenziale} \right)$$

Il th di Ampère in forma differenziale collega il rotore del campo  $\vec{B}$  con la densità di corrente in quel punto

- Il solenoide è costituito da un filo attraversato da una corrente  $I$ , avvolto in una superficie cilindrica per una lunghezza  $l$ , secondo  $N$  spire:



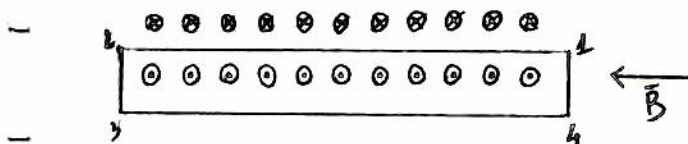
- Calcoliamo il campo magnetico  $\vec{B}$  generato dalle correnti che attraversano un solenoide come applicazione del th. di

- Ampere, supponendo che le spire sono molto addensate, e la lunghezza  $l$  sia molto grande rispetto alle dimensioni trasversali.

- (Tale condizione corrisponde a quella ideale di solenoide a lunghezza infinita con spire totalmente addensate da formare una superficie cilindrica). In queste circostanze il campo magnetico  $\vec{B}$  è nullo all'esterno del solenoide ed è uniforme al suo interno.

- Definiamo:  $n = N/l$  ( $n$  è il numero di spire per unità di lunghezza)

- Effettueremo un taglio del solenoide con un piano perpendicolare per il suo asse di simmetria e considereremo il rettangolo 1234 applicando a tale percorso il th. di Ampere:



$$\oint_{1234} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

gli integrali sui tratti 23 e 14 sono uguali ed opposti, perciò la loro somma è nulla  
- l'integrale sul tratto 34 è nullo in quanto  $\vec{B}$  è  $\perp$  all'esterno del solenoide

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot l$$

Per il th. di Ampere vale:  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_{conc} = \mu_0 \cdot n \cdot l \cdot I$

esplicitando:  $B \cdot l = \mu_0 \cdot n \cdot l \cdot I \Rightarrow B = \mu_0 \cdot n \cdot I = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I$  (camp. magnetico all'int. del solenoide)



• Equazioni di Maxwell totali:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad \text{n.b.: tali equazioni sono valide considerando i campi } \vec{B} \text{ ed } \vec{E} \text{ indipendenti tra di loro}$$

• Legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Neumann-Lenz:

- Consideriamo un camp di induzione magnetica  $\vec{B}$  in generale variabile da punto a punto e dipendente dal tempo. Se  $L$  una linea chiusa contenuta nel dominio di  $\vec{B}$ . La legge dell'induzione elettromagnetica afferma che la intensità del camp elettromotore  $\vec{E}_i^{\text{TOT}}$  lungo la linea chiusa  $L$  è uguale alla derivata totale rispetto al tempo, cambiata di segno, del flusso del camp  $\vec{B}$  attraverso una qualunque superficie  $S$  che si appiaccia alla linea  $L$ :

$$\oint_L \vec{E}_i^{\text{TOT}} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s} \rightarrow \varphi_B(t) \quad \text{essendo: } \oint_L \vec{E}_i^{\text{TOT}} = \oint \text{e.m. (= forza elettromotrice), si scrive:}$$

$$\oint \text{e.m.} = - \frac{d}{dt} \varphi_B(t)$$

- È da evidenziare il fatto che, anche se il flusso non è dipendente dal tempo, esso potrebbe variare anche solo perché la linea  $L$  è in movimento o si deforma: in tal caso il prodotto scalare  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  varia, e di conseguenza anche il flusso. Ma variare del flusso si ha anche quando  $\vec{B}$  non è uniforme nello spazio e la linea  $L$  è in movimento.
- Tali considerazioni evidenziano che, in realtà, non è detto che se  $\vec{B}$  non è esplicitamente variabile nel tempo la f.e.m. lungo  $L$  è necessariamente nulla, poiché esistono altri fattori che rendono il flusso variabile.

Quando la linea  $L$  è un filo conduttore di resistenza  $R$  è possibile calcolare la corrente che circola nel filo:

$$\oint \text{e.m.} = - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s} \Rightarrow i = \frac{\oint \text{e.m.}}{R} \Rightarrow i = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dt} \varphi_B(t)$$

Quando il filo è aperto non vi è una corrente stazionaria, ma è comunque presente una differenza di potenziale ai suoi capi.

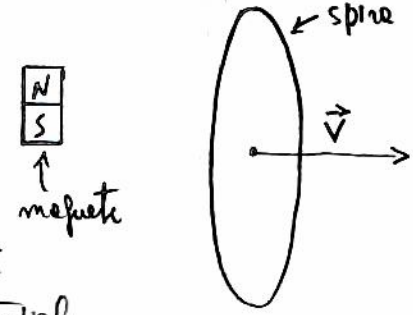
Nota la considerazione fatta in precedenza sulle molteplicità delle cause che possono produrre la variazione del flusso di  $\vec{B}$ , evidenziamo alcuni casi che producono lo stesso effetto delle leggi di F-N-L:

• INDUZIONE DI 1° SPECIE:

Consideriamo un magnete fermo, che genera nello spazio circostante un camp magnetico  $\vec{B}$  stazionario, ma non uniforme, e una spira conduttrice. Allontaniamo la spira dal magnete con velocità  $\vec{v}$ . Si genera nella spira una corrente solo quando la spira è in movimento.

Se si elimina la spira al magnete la corrente circola nella spira: in senso contrario rispetto e quando era allontanata. Ciò può essere spiegato in 2 modi:

• Gli elettroni contenuti nella spira si muovono con velocità  $\vec{v}$  nel camp  $\vec{B}$  spira, essendo soggetti alla forza di Lorentz prodotta, muovendosi, una differenza di potenziale.





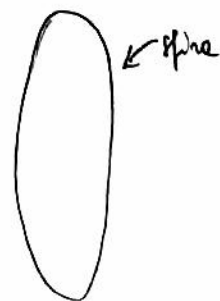
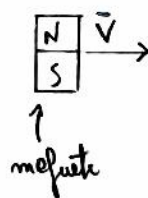
- Quando il camp  $B$  non muove nello spazio, facendo la spira è in moto solo il filo di  $B$  attraverso la superficie e cui si applica la spira. C'è dunque, al movimento della spira, una variazione del flusso di  $B$  che genera, per la legge di  $F-N-L$ , una fem, responsabile e una volta di una corrente che circola nello spira. Siamo nella situazione in cui il flusso del camp magnetico varia solo per la variazione temporale di  $B$ . Situazioni in cui vi è un conduttore in moto in un camp magnetico costante nel tempo (ma non necessariamente unitario nello spazio) sono classificate come fenomeni di induzione elettromagnetica di I° specie.

### • INDUZIONE DI II° SPECIE:

Qualmente, sono definiti fenomeni di induzione di II° specie quelli in cui non è il conduttore e muoversi, ma la sorgente del camp, e quindi il camp stesso.

Consideriamo sempre il magneti e la spira del caso precedente. In questo caso, però, la spira è fissa ed è il magneti e muoversi con velocità  $\vec{v}$ .

Anche in questo caso vi è una fem e quindi una corrente indotta nella spira. In tale situazione, però, non vi è alcun contrasto con la legge di Lorentz: la fem indotta dipende dal moto relativo tra i due componenti.



Le leggi dell'induzione elettromagnetica è valida anche nel caso in cui non c'è movimento di nessuno dei due componenti, come nel caso di due spire: se solo nella prima spira c'è una corrente variabile nel tempo, tale variazione dà origine a un camp di induzione magnetica variabile anche esso nel tempo, che a sua volta genera un flusso magnetico (variabile) che crea una fem sia nella spira stessa (fem autoindotta) che nell'altra spira (fem indotta), provocando quindi il processo di corrente indotte.

Al fine dell'induzione elettromagnetica non è quindi sufficiente copiare qualche motore o modello evidente della variazione del flusso magnetico nel tempo (può essere indifferente per fenomeni di I° e II° specie): l'importante è individuare le leggi di variazione del flusso nel tempo.

La risoluzione dei fenomeni di I° e di II° specie viene messo introducendo le teorie della relatività ristretta di Einstein. Considero al riguardo una spira rettangolare con due lati coincidenti con gli assi  $x$  e  $y$ , immersa in un camp di induzione magnetica orientatamente lungo  $x$ :  $B(x) = B_0 x$ . La spira si muove con velocità costante  $v = x/t$ , mantenendo sempre il suo lato coincidente con l'asse  $x$ . È possibile derivare il fenomeno osservato della "forza dell'orientatore".

• Descrizione dell'orientatore relativo con gli assi  $x, y, z$  (approccio Pappapetero): l'orientatore vede la spira che si muove e il flusso del camp  $B$  che cresce, dato che si muove verso di camp più intenso. Dunque attribuisce la variazione del flusso al moto della spira.

• Descrizione dell'orientatore relativo con la spira: l'orientatore vede la spira fissa, ma nota un aumento nel tempo del flusso del camp magnetico attraverso la spira, attribuendo la variazione del flusso alla variazione del camp  $B$  nella spira.



### Autoinduzione

Se un solo circuito attraversato da una corrente variabile nel tempo presenta il fenomeno di induzione elettromagnetica.

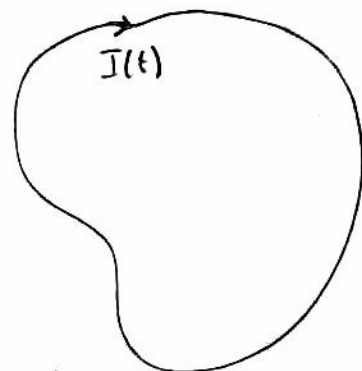
Consideriamo un circuito attraversato da una corrente  $I(t)$ . La corrente genera

un campo di induzione magnetica  $\vec{B}(t)$ , che è perpendicolare, istante per istante,

a  $I(t)$  ed  $\vec{B}$ . Vi sarà dunque un flusso del campo  $\vec{B}$  attraverso la superficie  $S$  che

sarà quella del circuito, che risulta essere stesso proporzionale a  $I(t)$ :

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = L \cdot I(t)$$



La costante  $L$  tra  $\Phi_B(t)$  e  $I(t)$  è il coefficiente di autoinduzione o semplicemente induttanza. È più definito come il rapporto fra il flusso magnetico concatenato con il circuito e la corrente che fluisce nel circuito stesso:

$$L = \frac{\Phi_B(t)}{I(t)} \quad \text{Tale coefficiente dipende esclusivamente dalle geometrie del problema. L'unità di misura di } L \text{ è:}$$

$$[L] = \frac{[W]}{[A]} = [H] \text{ (Henry)} \quad 1H = \frac{1W}{1A}$$

È possibile scrivere le leggi dell'induzione elettromagnetica utilizzando  $L$ :

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{dt} (L \cdot I(t)) \Rightarrow \text{fem} = L \cdot \frac{1}{dt} (I(t)) \text{ (legge di autoinduzione elettromagnetica)}$$

Definitiva, nasce una fem in un circuito in risposta ad una corrente variabile nel tempo.

• Coefficiente di autoinduzione in un solenoide:

Vogliamo calcolare il flusso del campo  $\vec{B}$  concatenato con le  $N$  spire di un solenoide e, conseguentemente, determinare il coefficiente  $L$  che lo mette in relazione con la corrente  $I(t)$  che lo attraversa.

1°  $\rightarrow$  n° di spire per unità di lunghezza  $n = \frac{N}{l}$ , dove  $N$  è il numero di spire ed  $l$  la lunghezza del solenoide.

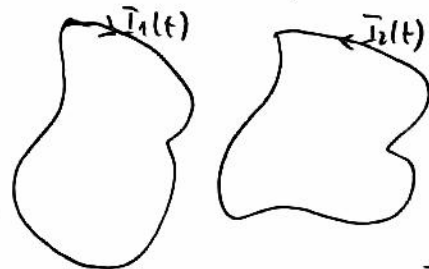
$$\vec{B} = \mu_0 \cdot n \cdot I = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I \Rightarrow \Phi_B(S) = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I \cdot S \Rightarrow \Phi_B^{tot} = N \cdot \Phi_B(S) \Rightarrow \Phi_B = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot I \Rightarrow \boxed{L = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S}$$

$\downarrow$  flusso concatenato con una spira       $\downarrow$  flusso concatenato con  $N$  spire

### Mutua Induzione

Consideriamo due circuiti, entrambi fermi, attraversati dalle correnti  $I_1(t)$  ed  $I_2(t)$ . Come abbiamo precedentemente visto, la corrente  $I_1(t)$  genera un campo di induzione magnetica  $\vec{B}_1(t)$  nel suo spazio circostante. Analogamente un flusso  $\Phi_2(t)$  concatenato con il 2° circuito, per effetto del campo  $\vec{B}_1(t)$  generato da  $I_1(t)$ .

$$\Phi_2(t) = M_{12} \cdot I_1(t) \quad M \rightarrow \text{costante di proporzionalità che lega il flusso del campo magnetico attraverso il secondo circuito con la corrente che attraversa il primo circuito (e viceversa, per simmetria, il campo } \vec{B}_2)$$



$M$  è definito come coefficiente di mutua induttanza tra i due circuiti; in particolare tra l'elemento 1 e l'elemento 2. 59

La tensione del primo  $\varphi_1(t)$  genera una f.e.m. nell'elemento 2 per cui:  $\varphi_{e2} = \frac{d}{dt}(\varphi_2(t)) = -\frac{d}{dt}(M_{12} \cdot I_1(t)) = -M_{12} \cdot \frac{d}{dt}(I_1(t))$

In maniera del tutto analoga, anche la corrente  $I_2(t)$  genera un campo di induttanza magnetica  $B_2(t)$ , per cui vi sarà un flusso di tale campo concatenato all'elemento 1, che vale:  $\varphi_1(t) = M_{21} \cdot I_2(t)$ . E genera una f.e.m. nell'elemento 1 per cui:  $\varphi_{e1} = -M_{21} \cdot \frac{d}{dt}(I_2(t))$ .

Dimostriamo che  $M_{12} = M_{21}$ , che chiameremo  $M$  (coeff. di mutua induttanza), per cui:

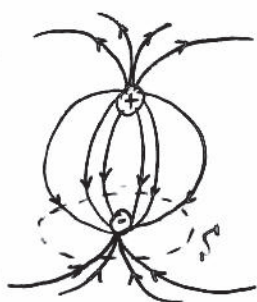
$$\begin{cases} \varphi_2(t) = M \cdot I_1(t) \rightarrow \varphi_{e2} = -M \cdot \frac{d}{dt} I_1(t) \\ \varphi_1(t) = M \cdot I_2(t) \rightarrow \varphi_{e1} = -M \cdot \frac{d}{dt} I_2(t) \end{cases} \quad M = \frac{\varphi_2(t)}{I_1(t)} = \frac{\varphi_1(t)}{I_2(t)}$$

N.B.:  $M$  dipende dalle geometrie dei circuiti e dalla loro posizione. Si misura in Henry



$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (1) \\ \text{div } \vec{B} = 0 & (2) \\ \text{rot } \vec{E} = 0 & (3) \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & (4) \end{cases} \quad (\text{Considerando } \vec{E} \text{ e } \vec{B} \text{ indipendenti})$$

- (1) La prima equazione è in pratica l'espressione del teorema di Gauss espresso in forme differenziale. È da ricordare che la divergenza del campo elettrostatico non è nulla, ma assume un valore pari alla densità di carica in quel punto fatto lo esente dielettrico nel vuoto. Questa relazione differenziale può essere integrata, e facendo linee, considerando una superficie contenente una carica netta (pari ad una densità volume o una interna  $\rho$ ) si ottiene che le linee del campo elettrostatico non sono linee chiuse continue, ma hanno una sorgente e (talvolta) un pozzo. Perciò, per una qualunque superficie chiusa, il flusso del campo che la attraversa può essere non nullo, e, ad esempio, la sorgente del campo (e quindi delle linee di campo) è interna alla superficie e il pozzo (e presente) all'esterno della stessa. Possiamo considerare l'esempio di una superficie che racchiude una delle due cariche di un dipolo elettrico:



in questo caso le linee di campo hanno sorgente nella carica positiva e pozzo nella negativa. Attraverso la superficie  $S$  che racchiude la carica positiva entrano molte linee di campo entranti; mentre il flusso del campo  $\vec{E}$  attraverso  $S$  è diverso da 0, in particolare è positivo.

- (2)  $\text{div } \vec{B} = 0$ : tradotta in termini fisici, essendo le linee del campo magnetico delle linee chiuse il flusso del campo magnetico  $\vec{B}$  attraverso una qualsiasi superficie chiusa  $S$  è sempre nullo: le linee di forza di  $\vec{B}$  non hanno una sorgente o un pozzo, quindi, se si prende una qualsiasi superficie  $S$  immersa in un campo  $\vec{B}$ , le linee di forza passeranno da  $S$  in più punti, con flusso netto attraverso  $S$  pari a 0. (tutto ciò che entra è pari a ciò che esce).

- (3)  $\text{rot } \vec{E} = 0$ : dice che  $\text{rot } \vec{E} = 0$  vuol significare che le linee di forza del campo elettrostatico non formano rotazioni nelle cariche. Infatti,  $\text{rot } \vec{E} = 0, \nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E}$  è conservativo irrotazionale. L'espressione delle componenti di  $\vec{E}$ , applicando meccanicamente il th. di Stokes:  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_S 0 \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$

Ma che le componenti in un punto chiuso di  $\vec{E}$  è nullo vuol dire che il lavoro per spostare una carica in un punto chiuso rispetto al campo è pari a 0.

- (4)  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ : questa equazione deriva dal th. di Ampère, espresso in forme locali. Analogamente al campo elettrico, il campo magnetico  $\vec{B}$  genera delle rotazioni in quanto  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  (infatti, si vede il comportamento di una carica immersa in un campo magnetico).



Derivate temporali del flusso di un camp vettoriale dipendenti, in generale, dallo spazio e dal tempo:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} \frac{\partial}{\partial t} \vec{C} \cdot d\vec{S} + \int_{S(t)} \text{div} \vec{C} \cdot \vec{v} \, dS - \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{C} \, d\vec{l}$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 superficie costante, camp costante, camp costante,  
 camp variabile superficie variabile frontiera variabile

Si vuole ricavare le leggi dell'induzione elettromagnetica applicando le derivate temporali del flusso di un camp vettoriale come descritto:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_S \text{div} \vec{B} \cdot \vec{v} \, dS - \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{B} \, d\vec{l} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{B} \, d\vec{l}$$

$$\text{F.E.M.: } - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \oint_{\gamma} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{B} \, d\vec{l} \quad \left| \oint_{\gamma} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} + \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot \vec{B} \, d\vec{l} = \oint_{\gamma} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} \right.$$

$$\oint_{\gamma} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Th. di Stokes e di II membro:} \\ \oint_{\gamma} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = \oint_{\gamma} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{array} \right. \Rightarrow \oint_{\gamma} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \oint_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

N.B.: l'operatore integrale di I° e di II° membro si semplifica in quanto le rette delle superficie  $\gamma$  e  $S$  coincidono.  
 Scegliendo le stesse frontiere, è possibile esprimere le funzioni integrate.

Teorema di Ampere-Maxwell in forme differenziali

Il teorema di Ampere vale solo in condizioni stazionarie. Infatti, partendo dalle sue forme differenziali:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \text{div}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{J} \quad | \quad \text{div}(\text{rot} \vec{B}) = 0 \Rightarrow \mu_0 \text{div} \vec{J} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{J} = 0$$

ricordando l'espressione di continuità:  $\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  si ha che  $\text{div} \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  vale solo in condizioni stazionarie.

È ragionevole tentare quindi di modificare il teorema di Ampere in modo che risulti valido anche in condizioni non stazionarie di variabilità nel tempo, quindi in modo che sia compatibile con l'espressione di continuità (ossia col principio di conservazione della carica):  $\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

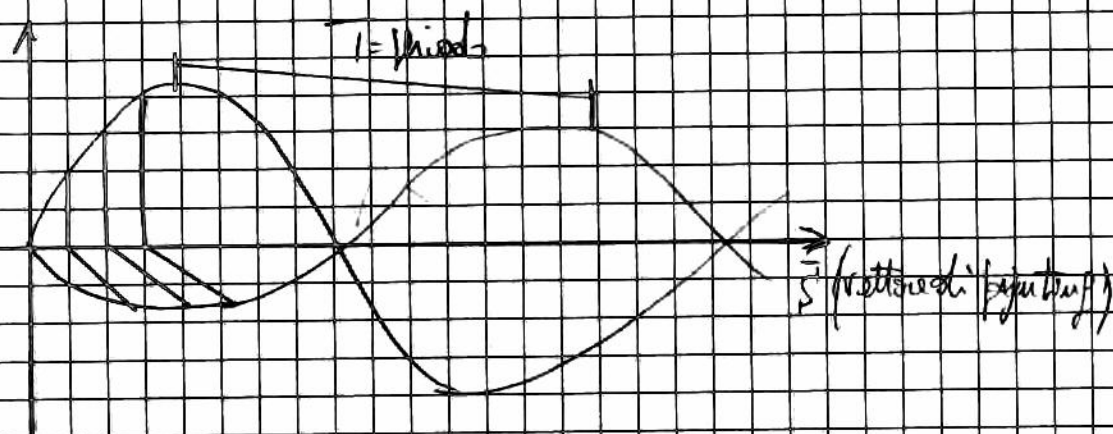
Sufficiente quindi che nel th di Ampere manchi qualcosa:  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{X})$ , dove  $\vec{X}$  è un termine che ha le dimensioni fisiche di  $\vec{J}$ . Affatto che  $\text{div}$  di I° e di II° membro:  $\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \text{div}(\vec{J} + \vec{X}) \Rightarrow \text{div} \vec{J} + \text{div} \vec{X} = 0$

Nel th di Gauss vale:  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \text{div} \vec{E}$ . Per ritrattare nell'eq. di continuità:  $\text{div} \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{J} = - \text{div} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{ritrovando l'espressione di div} \vec{J} \text{ con il teorema nell'espressione } \text{div}(\vec{J} + \vec{X}) = 0 \Rightarrow \vec{X} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## ONDE ELETTROMAGNETICHE

Le onde elettromagnetiche hanno origine da un sistema di cariche accelerate e producono un campo  $E(x,y,z)$  e  $B(x,y,z)$  correlati tra loro verso e valore in tempi successivi e in diverse regioni dello spazio.



Proprietà delle onde:

- $E$  e  $B$  si propagano alla stessa velocità  $c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$
- I moduli dei campi sono legati dalla relazione  $B = \frac{E}{c}$
- $E$  e  $B$  sono ortogonali tra di loro.
- Il verso del prodotto  $E \times B$  definisce il verso di propagazione dato da  $\vec{S}$ , il vettore di Poynting:  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E \times B$  (Energie nell'unità di tempo)
- Le onde elettromagnetiche non si propagano ma non interferiscono

EQUAZIONE DELLE ONDE:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$



PDE del I° ordine: (DAGLI APPUNTI DI) 1.2  
MATematica III

$$e_1 u_{x_1} + e_2 u_{x_2} + e u + d = 0$$

Se  $e_1, e_2, e$  non delle funzioni di  $x_1, x_2$  l'equazione è a coefficienti costanti, altrimenti è a coefficienti variabili.

PDE del II° ordine:

$$e_{11} u_{x_1 x_1} + e_{12} u_{x_1 x_2} + e_{22} u_{x_2 x_2} + b_1 u_{x_1} + b_2 u_{x_2} + e u + d = 0$$

se  $b = 0 \Rightarrow$  equazione omogenea

se  $b \neq 0 \Rightarrow$  equazione non omogenea.

Le PDE del II° ordine possono essere classificate in:

- ellittiche
- iperboliche
- paraboliche

Creando la matrice:

$$(e_{12} = e_{21})$$

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & \frac{e_{12}}{2} \\ \frac{e_{21}}{2} & e_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = e_{11}e_{22} - \frac{(e_{12})^2}{4}$$

A

se  $|A| > 0$  la conica rappresenta un'ellisse e l'equazione è ellittica  
 se  $|A| = 0$  la conica rappresenta una parabola e l'equazione è parabolica  
 se  $|A| < 0$  la conica è un'iperbole e l'equazione è iperbolica

• L'equazione di Laplace:  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 = \text{l'equaz. è ellittica}$$

• L'equazione del calore:  $u_t - u_{xx} = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{l'equaz. è parabolica}$$

$$\text{Se } u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

1.1

$$u(x_1, x_2)$$

Supponendo che le derivate di tale funzione siano continue, si possono calcolare le derivate:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^p \partial x_2^q}, \quad p+q=m$$

le nuove derivate possibili.

Un'equazione differenziale alle derivate possibili è un'equaz. del tipo:

$$f\left(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^p \partial x_2^q}\right) = \phi$$

L'ordine di un'equazione con derivate è definito dall'ordine massimo delle derivate possibili che compare.

• EQUAZIONE DELLA CORDA (O DELLE ONDE):

$$y_{tt} = c^2 y_{xx}$$

$$c^2 = \frac{\tau}{\mu}$$

Risolvendo tale equazione si ottiene il valore dello spostamento dell'origine al tempo  $t$ .  
 $\tau$  rappresenta la tensione della corda e  $\mu$  la massa per unità di lunghezza.

• EQUAZIONE DEL CALORE:

$$u_t = k \Delta u \quad \rightarrow k \text{ è il coefficiente di diffusività}$$

dove  $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$   $u(x, y, z, t)$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$   $\Delta u = \phi$  è l'equazione di Laplace quando la temperatura è costante  
 $u_t = \phi \Rightarrow$  la temperatura non varia nel tempo.

• EQUAZIONE DI LAPLACE:

$$\nabla^2 u = \phi \quad \Delta u = \phi$$

$$u_{xx} + u_{yy} = \phi$$

L'equazione di Laplace si ottiene anche ~~non~~ ottenendo prendendo  $u_t = \phi$  nell'eq. del calore.



• L'equazione delle onde (onde elettromagnetiche).

2.1

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & \phi \\ \phi & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \phi = 1 \Rightarrow \text{L'equazione è iperbolica}$$